Graduate J. Math. 1 (2016), 9 – 17

Opérades et Structures Commutatives à Homotopie Près

Najib Idrissi

Résumé

Nous donnons une introduction au domaine des opérades, des objets qui encodent les structures algébriques. Après les avoir définies, nous présentons plusieurs domaines d'application des opérades : espaces de lacets itérés, formalité, algèbres homotopiques, longs nœuds et groupe de Grothendieck–Teichmüller.

MSC 2010. Primary 18D50 ; Secondary 57T30.

Introduction

Les *structures algébriques* sont omniprésentes en mathématiques : groupes, anneaux, corps, monoïdes, algèbres associatives, commutatives, de Lie, de Poisson... En général, on définit de telles structures en les munissant d'un certain nombre de lois de composition (produit, crochet...) et en imposant certains axiomes (associativité, commutativité...). Par analogie, cela reviendrait à considérer les anneaux comme étant définis uniquement par un ensemble de générateurs et un ensemble de relations : c'est un point de vue utile, mais considérer l'anneau lui-même comme un objet à part entière permet de simplifier de nombreux concepts (on peut essayer de définir un idéal maximal de ce point de vue pour s'en convaincre), et certains anneaux ne sont pas naturellement définis par générateurs et relations.

Vers la fin des années 60, Boardman et Vogt [3] et May [27] introduisent les *opérades*. Ce sont des objets qui encodent de manière combinatoire les types d'algèbres. Au lieu de définir un type d'algèbre par « générateurs et relations », on considère toutes les opérations possibles (les éléments de l'opérade) et toutes les relations qui existent entre ces opérations quand on les compose entre elles. Cela permet, entre autres, de pouvoir comparer entre eux les types d'algèbres, et de considérer des types d'algèbres plus complexes que les types usuels.

La définition de May se base sur des travaux antérieurs, notamment les PROPs de Mac Lane [25], les associahèdres de Stasheff [31] ; on retrouve déjà l'idée chez les analyseurs de Lazard [22]. Utilisées au début pour étudier les espaces de lacets (section 2.1), elles ont depuis trouvé de nombreuses applications, en topologie algébrique et en algèbre homologique, en particulier au travers de la dualité de Koszul ([11], section 3).

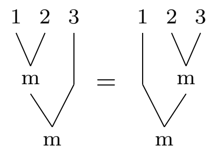
Ce document est essentiellement basé sur le mémoire de master de l'auteur, rédigé en 2014 à Lille, sous la direction de Benoit Fresse. L'auteur est particulièrement reconnaissant envers Benoit Fresse pour sa supervision et son aide durant la rédaction du mémoire.

1 Opérades

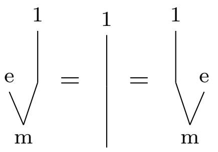
1.1 Idée générale

Une structure algébrique (eg. « algèbre associative ») est caractérisée par des opérations, ayant un certain nombre de variables d'entrée (leur nombre étant appelé l'arité), et une seule sortie. Ces opérations « agissent » sur les algèbres du type en question (eg. le produit $m = m(x_1, x_2)$ d'arité 2 « agit » sur les monoïdes). Les constantes de structure (eg. l'unité e du produit) sont des opérations qui ne prennent aucune variable d'entrée. Il est possible de permuter les variables d'entrée : l'opération $m(x_2, x_1)$ prend en entrée deux variables et les multiplie dans l'ordre opposé.

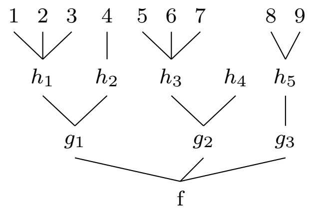
Il existe bien sûr toujours une opération « identité », notée 1, qui prend une variable en entrée et la laisse inchangée. Les opérations sont composables : par exemple on peut considérer une nouvelle opération $m(m, 1) = m(m(x_1, x_2), x_3)$, qui prend trois variables en entrée, multiplie les deux premières, puis multiplie le résultat avec la troisième. Cette composition vérifie certaines relations, ce qui peut se représenter sous la forme d'arbre (les numéros représentent les variables d'entrée ; e est une constante, donc n'a pas de variables d'entrée) :



$\iff$ m est associatif


$\iff$ e est l'unité de m

Une composition sur plusieurs niveaux pourrait être potentiellement ambiguë. Mais au niveau des structures algébriques, la composition des opérations est associative, et les axiomes des opérades demandent donc qu'une composition comme celle qui suit n'est pas ambiguë :



1.2 Définition précise

On se place dans une catégorie monoïdale (ie. munie d'un produit tensoriel) symétrique (ie. $A \otimes B \cong B \otimes A$), complète et cocomplète : $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$. Les exemples habituels considérés sont la catégorie des ensembles ou des espaces topologiques potentiellement pointés ($\otimes = \times$, $\mathbb{1} = \{*\}$), des espaces vectoriels (potentiellement gradués et munis d'une différentielle de degré -1 et de carré nul : on parle alors de dg-module). La définition originelle des opérades (topologiques) est donnée par May [27], et on peut se référer à Fresse [7] et Loday et Vallette [23] pour un traitement plus moderne.

Définition 1.1. Un **$\mathfrak{S}$-module** M est une suite $\{M(n)\}_{n\geq 0}$ d'objets de $\mathcal{C}$, l'objet $M(n)$ étant muni d'une action à droite du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

La catégorie associée $\mathcal{M}$ est une catégorie monoïdale symétrique enrichie sur $\mathcal{C}$, en posant

$$(M \otimes N)(n) = \bigoplus_{p+q=n} M(p) \otimes_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q} N(q)$$

et comme unité $\mathbb{1}$ (concentré en arité 0).

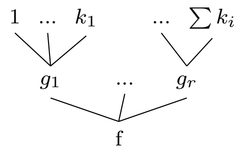
Étant donné une autre catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{E}$ enrichie sur $\mathcal{C}$, on peut définir le produit « de composition » $M \circ X = \bigoplus_{n\geq 0} M(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} X^{\otimes n}$ ($M \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{E}$). Cela munit en particulier $\mathcal{M} = \mathcal{E}$ d'une nouvelle structure monoïdale symétrique $(\mathcal{M}, \circ, I)$, avec pour unité $I(1) = \mathbb{1}$, $I(n \neq 1) = 0$.

Définition 1.2. Une **opérade** (symétrique) $\mathtt{P}$ est un monoïde interne à $(\mathcal{M}, \circ, I)$.

Concrètement, une opérade est un $\mathfrak{S}$-module $\{\mathtt{P}(n)\}$ muni d'un morphisme $\mathbb{1} \to \mathtt{P}(1)$, et de morphismes de composition qui vérifient des propriétés d'associativité et d'équivariance (voir les références pour les axiomes explicites) :

$$\begin{aligned} &\gamma : \mathtt{P}(r) \otimes \mathtt{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathtt{P}(k_r) \\ &\quad \to \mathtt{P}(k_1 + \cdots + k_r) \\ \iff &\gamma : \mathtt{P} \circ \mathtt{P} \to \mathtt{P}. \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathtt{P}(r)$ représentent les opérations d'arité r. Le morphisme $\mathbb{1} \to \mathtt{P}(1)$ représente l'opération identité. Les morphismes γ décrivent comment composer les opérations entre elles : $\gamma(f; g_1, \dots, g_r) =: f(g_1, \dots, g_r)$ est l'opération où la sortie de g_i est branchée dans la $i$ème entrée de f. La représentation sous forme d'arbre permet de mieux comprendre comment interpréter les γ et quels sont les axiomes qu'ils doivent vérifier.


$= \gamma(f; g_1, \dots, g_r)$

1.3 Exemples

L'exemple fondamental est l'**opérade des endomorphismes** d'un objet $X \in \mathcal{E}$:

$$\mathtt{End}_X(n) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X^{\otimes n}, X).$$

L'opération identité est l'identité $1_X : X \to X$, et la composition est la composition évidente des morphismes :

$$\begin{aligned} &\big(f(g_1, \dots, g_r)\big)(x_1, \dots, x_{k_1+\cdots+k_r}) \\ &:= f(g_1(x_1, \dots, x_{k_1}), \dots). \end{aligned}$$

Les opérades sont en fait conçues de telle sorte que $\mathtt{End}_X$ soit (tautologiquement) une opérade. L'intérêt des opérades réside dans leurs actions :

Définition 1.3. Une **algèbre** sur une opérade $\mathtt{P}$ est un morphisme d'opérades $\mathtt{P} \to \mathtt{End}_A$. De manière équivalente, une algèbre sur $\mathtt{P}$ est donnée par une action de monoïde $\mathtt{P} \circ A \to A$.

De manière explicite (dans la catégories des ensembles par exemple), si A est une algèbre sur $\mathtt{P}$, alors pour chaque opération $\alpha \in \mathtt{P}(r)$ d'arité r on dispose d'un morphisme $\bar{\alpha} : A^{\times r} \to A$. Ces morphismes, composés entre eux, vérifient les lois de composition qui existent dans l'opérade $\mathtt{P}$. La $\mathtt{P}$-algèbre libre sur X est donnée par $\mathtt{P} \circ X$.

Cette définition englobe de nombreux types de structures algébriques. Par exemple, on a les opérades $\mathtt{Ass}$ et $\mathtt{Com}$ des algèbres associatives et commutatives (et leurs versions unitaires $\mathtt{Ass}_+$ et $\mathtt{Com}_+$), l'opérade $\mathtt{Lie}$ des algèbres de Lie… Ces opérades peuvent être décrites par générateurs et relations : par exemple $\mathtt{Com}$ est engendrée par une opération $\mu(x_1, x_2) = \mu(x_2, x_1)$ (il faut décrire comment $\mathfrak{S}_n$ agit sur les générateurs d'arité n) avec la relation $\mu(\mu(x_1, x_2), x_3) = \mu(x_1, \mu(x_2, x_3))$. L'opérade $\mathtt{Ass}$ a deux générateurs $m(x_1, x_2)$ et $\bar{m}(x_1, x_2)$, avec $m(x_2, x_1) = \bar{m}(x_1, x_2)$ et $m(m(x_1, x_2), x_3) = m(x_1, m(x_2, x_3))$.

Remarque 1.4. Ceci est une généralisation des représentation d'algèbres associatives (qui généralisent les représentations de groupes). La composition induit un produit associatif $\mathtt{P}(1) \otimes \mathtt{P}(1) \to \mathtt{P}(1)$, et réciproquement toute algèbre associative A induit une opérade $\mathtt{P}_A$ concentrée en arité 1. Une algèbre sur $\mathtt{P}_A$ est alors exactement une représentation de A.

On peut déjà interpréter certains résultats de ce point de vue. Par exemple, toute algèbre commutative est une algèbre associative ; cela se traduit par un morphisme d'opérades $\mathtt{Ass} \to \mathtt{Com}$ qui envoie les générateurs $m(x_1, x_2)$ et $m(x_2, x_1)$ de $\mathtt{Ass}$ sur le générateur $\mu(x_1, x_2) = \mu(x_2, x_1)$ de $\mathtt{Com}$. De même, une algèbre associative est une algèbre de Lie, ce qui correspond à un morphisme $\mathtt{Lie} \to \mathtt{Ass}$ qui envoie le crochet (générateur) $\lambda(x_1, x_2) \in \mathtt{Lie}(2)$ sur $m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$.

1.4 Variations

Il existe plusieurs variations du concept d'opérade.

On peut définir de manière équivalente les opérades par des morphismes de composition partiels $\circ_i$, où $f \circ_i g$ est l'opération où la sortie de g est branchée dans la $i$ème entrée de f et l'identité dans le reste des entrées.

Les opérades non symétriques, où l'on ne demande pas d'action des $\mathfrak{S}_n$ sur les opérations. Il y a une opérade non symétrique des algèbres associatives $\mathtt{As}$, mais pas d'opérade des algèbres commutatives, par exemple.

Les coopérades encodent les cogèbres : chaque coopération a une entrée et plusieurs sorties. On obtient ainsi les cogèbres coassociatives, cocommutatives, les cogèbres de Lie...

Les PROPs (« **pro**duct-**p**ermutation ») sont une généralisation où les opérations ont plusieurs entrées et sorties. Une propérade est un cas particulier de PROP, où les graphes intervenant dans la composition sont tous connexes. On peut s'en servir pour modéliser les bigèbres (bi-associatives, bi-Lie, Frobenius...).

Les opérades colorées (ou multicatégories) sont aux opérades ce que les catégories sont aux monoïdes : on associe des couleurs (objets de la multicatégorie) aux entrées et sorties des opérations. Par exemple, si les couleurs sont $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, on peut avoir des opérations du type $(\clubsuit; \diamondsuit; \diamondsuit) \to \spadesuit$, ou encore $(\diamondsuit; \heartsuit) \to \heartsuit$. On ne peut alors brancher une sortie que dans une entrée de couleur correspondante. Si $\mathtt{P}$ est une opérade, les morphismes de $\mathtt{P}$-algèbres sont des algèbres sur une opérade à deux couleurs notée $\mathrm{Map}_{\mathtt{P}}$ (ou $\vec{P}$).

On peut également mentionner les opérades cycliques, les opérades modulaires... Voir le chapitre 13 de [23] pour plus de détails.

2 Les petits cubes

2.1 Principe de reconnaissance

Étant donné un (bon) espace topologique X muni d'un point base $* \in X$, on définit l'**espace des lacets** $\Omega X = \{f : [0,1] \to X \mid f(0) = f(1) = *\}$, muni de la topologie compacte-ouverte. On peut itérer cette construction :

$$\Omega^n X = \{f : [0,1]^n \to X \mid f(\partial[0,1]^n) = \{*\}\}.$$

Une des premières applications des opérades fut de reconnaître les espaces du type $\Omega^n X$ à homotopie près. Pour cela, on introduit des opérades particulières, les opérades des petits cubes $\mathtt{C}_n$. On considère les plongements rectilinéaires du cube $[0,1]^n$ dans lui-même, ie. ceux qui sont des compositions de translations et de matrices diagonales à coefficients positifs. L'espace $\mathtt{C}_n(r)$ est alors l'espace des r-uplets de tels plongements, dont les images ont des intérieurs deux à deux disjoints. La composition est la composition des plongements (1).

Alors $\Omega^n X$ est une algèbre sur $\mathtt{C}_n$, en posant pour $\alpha \in \mathtt{C}_n(r)$ et $f_1, \dots, f_r \in \Omega^n X$:

$$\alpha(f_1, \dots, f_r)(u) = \begin{cases} f_i(t) & u = \alpha_i(t), \\ * & u \notin \bigcup \mathrm{im}(\alpha_i). \end{cases}$$

La condition au bord assure que $\alpha(f_1, \dots, f_r)$ est bien définie et continue (donc un élément de $\Omega^n X$), et on vérifie que la composition dans $\mathtt{C}_n$ s'envoie bien sur la composition des lacets dans $\mathtt{End}_{\Omega^n X}$.

L'opérade $\mathtt{C}_n$ est incluse dans $\mathtt{C}_{n+1}$ via $[0,1]^n \times 0 \subset [0,1]^{n+1}$, et on note $\mathtt{C}_\infty$ la colimite (l'« union ») des $\mathtt{C}_n$. On vérifie de même que si X est un espace de lacets d'ordre infini (ie. il existe une suite X_n avec $X_0 = X$ et $X_n \simeq \Omega X_{n+1}$), alors c'est une algèbre sur $\mathtt{C}_\infty$.

Théorème 2.1 ([27, 3])**.** *Si Y est un espace connexe par arcs muni d'une structure de $\mathtt{C}_n$-algèbre, $1 \le n \le \infty$, alors il existe un n-espace de lacets X faiblement équivalent à Y via des morphismes de $\mathtt{C}_n$-algèbres.*

Idée de preuve. La preuve (de May) de ce théorème repose sur la construction d'un « délaçage » explicite $B_n Y$ (qui dépend de la structure d'algèbre $\mathtt{E}_n$ de Y) via une construction bar simpliciale, et de l'utilisation d'un théorème d'approximation qui permet de relier les algèbres libres sur $\mathtt{E}_n$ et les algèbres libres sur l'opérade $\Omega^n \Sigma^n$. ☐

En général, on appelle **opérade** $\mathtt{E}_n$ une opérade $\mathtt{P}$ faiblement équivalente à l'opérade $\mathtt{C}_n$ (ie. il existe un zigzag de morphismes d'opérades $\mathtt{P} = \mathtt{P}_1 \xleftarrow{\sim} \mathtt{P}_2 \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} \mathtt{P}_l = \mathtt{C}_n$ qui induisent des équivalences d'homotopie sur les espaces $\mathtt{P}_l(r)$). On peut citer par exemple l'opérade $\mathtt{D}_n$ des petits disques, l'opérade de Kontsevich ou l'opérade de Fulton–MacPherson (cf. section 2.3). Ces opérades sont au centre de nombreux autres résultats, comme par exemple l'interpolation $A_\infty \simeq \mathtt{E}_1 \hookrightarrow \mathtt{E}_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathtt{E}_\infty$ entre types d'algèbres homotopiques de la section 3.

2.2 Conjecture de Deligne

Dans toute la suite, la catégorie de base sera celle des dg-espaces vectoriels. Grâce au foncteur des chaînes singulières C_* (sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique nulle par exemple) et au morphisme de Künneth, les opérades topologiques $\mathtt{C}_n$ donnent des dg-opérades $C_*(\mathtt{C}_n)$. Comme avant, on appelle « opérade $\mathtt{E}_n$ » toute opérade **cofibrante** (section 3) faiblement équivalente à $C_*(\mathtt{C}_n)$. On peut également appliquer le foncteur homologie pour obtenir des opérades en modules gradués $\mathtt{e}_n := H_*(\mathtt{C}_n)$. Celles-ci sont en fait bien connues :

Définition 2.1. Une *n-algèbre de Gerstenhaber*[1] $(A, \cdot, [\,,\,])$ est la combinaison d'une algèbre commutative $(A, \cdot)$ et d'une

1. Elles sont aussi appelées $(n-1)$-algèbres de Poisson par certains auteurs

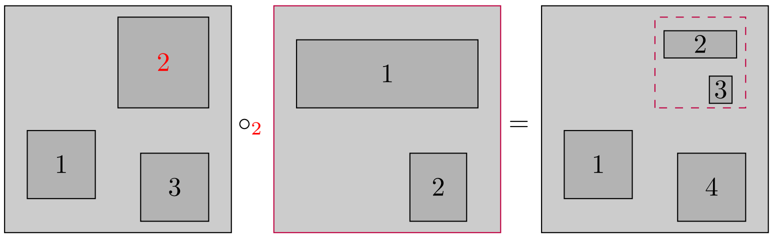


Fig. 1: Exemple de composition dans $\mathtt{C}_2$

algèbre de Lie $(A, [\,,\,])$ avec un crochet de degré $n-1$ vérifiant la relation de Leibniz $[a, b \cdot c] = [a, b] \cdot c + \pm b \cdot [a, c]$.

On note $\mathtt{Ger}_n$ l'opérade des n-algèbres de Gerstenhaber. Dans le cas $n = 1$, on parle d'**algèbre de Poisson** : $\mathtt{Poi} := \mathtt{Ger}_1$. Ces opérades sont engendrées par le produit μ et le crochet λ.

Les algèbres de Poisson apparaissent naturellement en géométrie symplectique ($C^\infty(X)$ est une algèbre de Poisson pour une variété symplectique X) et dans l'étude des groupes quantiques.

Théorème 2.2 ([4]). *L'homologie de $\mathtt{E}_n$ est donnée par : $\mathtt{e}_1 = \mathtt{Ass}$; $\mathtt{e}_\infty = \mathtt{Com}$; $\mathtt{e}_n = \mathtt{Ger}_n$, $1 < n < \infty$.*

En théorie de la déformation, la **cohomologie de Hochschild** $HH^*(A)$ d'une algèbre associative $(A, \cdot)$ (voir aussi la section 5) est définie comme l'homologie d'un complexe de cochaînes $CH^n(A) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$ avec comme différentielle $b : CH^n(A) \to CH^{n+1}(A)$:

$$\begin{aligned}
&(bf)(a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) \\
&= \sum_i \pm f(\dots \otimes a_i \cdot a_{i+1} \otimes \dots) \\
&+ \pm a_1 \cdot f(a_2 \otimes \dots) + \pm f(\dots \otimes a_n) \cdot a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Elle donne des obstructions à l'existence de déformations de $(A, \cdot)$, par exemple les déformations formelles : des produits associatifs $\star : A[[\hbar]] \otimes A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$ définis sur les séries formelles à coefficients dans A, tels que $a \star b \equiv a \cdot b \pmod{\hbar}$ $\forall a, b \in A$.

On peut définir par des formules explicites un cup-produit et un crochet de Lie sur $HH^*(A)$ qui en font une 2-algèbre de Gerstenhaber. Deligne posa la question en 1993 : existe-t-il une structure de $\mathtt{E}_2$-algèbre sur $CH^*(A)$ qui induit en homologie la structure de $\mathtt{Ger}_2$-algèbre sur $HH^*(A)$?

Théorème 2.3 (Conjecture de Deligne [32, 21, 28, 2]...). *Il existe une structure de $\mathtt{E}_2$-algèbre sur $CH^*(A)$ qui induit la structure de $\mathtt{Ger}_2$-algèbre sur $HH_*(A)$.*

Idée de preuve. Il y a plusieurs preuves de la conjecture. L'idée récurrente est de construire une opérade spécifique, de montrer qu'elle est équivalente à $C_*(\mathtt{C}_2)$, et de montrer qu'elle agit « naturellement » sur $CH^*(A)$. Une preuve plus récente (Hess–Scott) montre que $HH^*(A) \cong \pi_*\Omega^2 \operatorname{Def}(A)$ (à relier à la section 2.1). $\square$

2.3 Formalité des opérades $\mathtt{E}_n$

Sur un corps de caractéristique nulle, un dg-module V est toujours **formel** : il est équivalent à son homologie, via un zigzag de **quasi-isomorphismes** (des morphismes de dg-modules qui induisent un isomorphisme en homologie) $V \xleftarrow{\sim} V_1 \xrightarrow{\sim} V_2 \xleftarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} V_n \xrightarrow{\sim} H(V)$. En général, on dit qu'une dg-algèbre associative est formelle si elle est équivalente à son homologie via un zigzag de morphismes d'algèbres (ce n'est pas toujours le cas, même en caractéristique nulle). On peut toujours se ramener à un zigzag avec seulement trois objets.

Théorème 2.4 ([19] ; [33] dans le cas $n = 2$). *Les opérades $\mathtt{E}_n$ sont **formelles** sur $\mathbb{R}$, ie. il existe une chaîne d'équivalences faibles (qui sont des morphismes d'opérades) entre $\mathtt{E}_n$ et $\mathtt{e}_n$.*

Idée de preuve (Kontsevich). On se réfère à [24] pour les détails. La chaîne de quasi-isomorphismes ressemble à :

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{E}_n = C_*(\mathtt{FM}_n) & C_*^{sa}(\mathtt{FM}_n) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dl, "\sim"'] \\
\mathtt{Graphs}_n & H_*(\mathtt{FM}_n) = \mathtt{e}_n. \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Ici, $\mathtt{FM}_n$ est l'opérade de Fulton–MacPherson ; c'est une opérade $\mathtt{E}_n$. Elle est construite comme une compactification des espaces de configurations dans $\mathbb{R}^n$ (on sait que $\mathtt{C}_n(r) \simeq \mathrm{Conf}(r, \mathbb{R}^n) \subset (\mathbb{R}^n)^r$), où l'on permet aux points d'être infinitésimalement proches tout en gardant une distance et une direction relatives. Le foncteur C_*^{sa} est le foncteur des chaînes semi-algébriques (un ensemble semi-algébrique est une union et intersection de solutions d'inéquations polynomiales), et la théorie générale montre que $C_*^{sa} \xrightarrow{\sim} C_*$ pour les bons espaces.

L'opérade $\mathtt{Graphs}_n$ est une opérade décrite de manière combinatoire par des complexes de graphes « admissibles ». Kontsevich définit explicitement des formes différentielles (semi-algébriques) sur $\mathtt{FM}_n$ pour obtenir, via intégration (il faut vérifier la convergence) la seconde équivalence. Enfin, la description par Cohen [4] de la cohomologie des espaces de configurations $\mathrm{Conf}(r, \mathbb{R}^n) \simeq \mathtt{FM}_n(r)$ comme un complexe de forêts permet de conclure. $\square$

Une application majeure de ce théorème est la *quantification par déformation* des variétés de Poisson (les variétés X telles que $A = C^\infty(X)$ est une algèbre de Poisson, où le produit est le produit des fonctions). Étant donné une algèbre commutative A et une déformation formelle $\star : A[[\hbar]] \otimes A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$, on peut montrer que $\{a,b\}_\star := \frac{1}{\hbar}(a \star b - b \star a) \pmod{\hbar}$ définit un crochet de Poisson sur A. Le théorème suivant combine la formalité et la conjecture de Deligne :

Théorème 2.5 ([20])**.** *Pour toute variété de Poisson X où $C^\infty(X) =: (A, \cdot, [\,,\,])$, il existe une déformation formelle* canonique *$(A[[\hbar]], \star)$ de $(A, \cdot)$ dont les composantes sont des opérateurs bidifférentiels, telle que $\{\,,\,\}_\star = [\,,\,]$.*

Récemment, Fresse et Willwacher [10] ont amélioré le théorème 2.4 dans le cas $n \geq 3$. Ils montrent que, sous certaines conditions techniques, si l'homologie d'une opérade $\mathtt{P}$ est isomorphe à l'homologie de $\mathtt{C}_n$ (comme Λ-opérade de Hopf), alors $\mathtt{P}$ a automatiquement le même type d'homotopie rationnel que $\mathtt{C}_n$: on dit que l'opérade $\mathtt{C}_n$ est « intrinsèquement formelle ». Du côté algébrique, un énoncé similaire sur les dg-opérades dont la cohomologie est isomorphe à la cohomologie de $\mathtt{C}_n$ implique la formalité de $\mathtt{C}_n$ sur $\mathbb{Q}$. La preuve montre aussi la formalité *relative* des opérades $\mathtt{C}_n$ en codimension ≥ 2 (i.e. l'inclusion $\mathtt{C}_n \to \mathtt{C}_{n+k}$ est formelle pour $k \geq 2$).

2.4 Variations sur les petits cubes

Il existe plusieurs variantes des opérades $\mathtt{E}_n$. L'opérade $f\mathtt{D}_n$ des *petits disques à repère* est une variante de l'opérade des petits disques $\mathtt{D}_n$ mentionnée à la section 2.1 : $f\mathtt{D}_n$ diffère de $\mathtt{D}_n$ en autorisant les plongements des disques à effectuer des rotations. Par un théorème de [30], on peut voir $f\mathtt{D}_n$ comme un « produit semi-direct » $f\mathtt{D}_n = \mathtt{D}_n \rtimes SO(n)$. L'étude de $f\mathtt{D}_n$ est liée à la conjecture de Deligne *cyclique* (cf. section 2.2) [34, 18, 29]. L'opérade $f\mathtt{D}_2$ est par exemple équivalente à l'opérade des cactus [18].

L'opérade « Swiss-Cheese » de Voronov [36] est une opérade colorée qui gouverne l'action d'une algèbre $\mathtt{E}_2$ sur une algèbre $\mathtt{E}_1$. Comme expliqué par Hoefel [13], cette opérade est notamment liée aux « Open-Closed Homotopy Algebras » de Kajiura et Stasheff [17], des types d'algèbres qui apparaissent dans l'étude de la quantification par déformation. L'auteur [16] a montré que le groupoïde fondamental de l'opérade Swiss-Cheese gouvernait l'action d'une catégorie monoïdale tressée (cf. section 4.2) sur le centre de Drinfeld d'une catégorie monoïdale.

3 Algèbres homotopiques

En général, pour une opérade quelconque $\mathtt{P}$, si un objet Y est une $\mathtt{P}$-algèbre et que $X \simeq Y$, alors X n'est pas nécessairement une $\mathtt{P}$-algèbre. La question est de savoir quelles opérades vérifient cette propriété d'invariance : c'est une idée de Boardman–Vogt pour le cadre topologique, et de Kadeishvili pour les complexes de chaînes. On peut aussi se référer à [26] ou à [23, Chapitre 10].

En considérant un cas simple, si un espace topologique X a le type d'homotopie d'un monoïde topologique (une algèbre sur $\mathtt{Ass}_+$), alors X est muni d'un produit associatif et unitaire à homotopie près. Si l'on veut multiplier $n \geq 3$ éléments de X, il faut donc faire un choix dans le placement des parenthèses ; on peut passer d'un choix à l'autre par des homotopies, mais a priori le passage n'est pas canonique (il y a plusieurs chemins différents).

Mais en fait, X a plus de structure : c'est une algèbre sur l'opérade « **associative à homotopie fortement cohérente près** » A_∞, et l'espace des choix de parenthésages est contractile. La raison est que tout monoïde topologique est une algèbre A_∞ ($\exists A_\infty \to \mathtt{Ass}_+$), et que tout espace ayant le type d'homotopie d'une algèbre A_∞ est encore une algèbre A_∞.

Les types d'algèbres homotopiques ont été définies de manière « ad-hoc » dans de nombreux cas : les algèbres A_∞ (associatives), $\mathtt{E}_\infty$ (commutatives), L_∞ (Lie), etc. On a que $A_\infty \simeq \mathtt{E}_1$, et l'opérade $\mathtt{E}_\infty$ est bien équivalente à $C_*(\mathtt{C}_\infty)$. La théorie des opérades permit de définir une construction générale : si $\mathtt{P}$ est une opérade, une algèbre homotopique sur $\mathtt{P}$ est une algèbre sur un modèle **cofibrant** $Q_\mathtt{P} \xrightarrow{\sim} \mathtt{P}$, l'analogue dans la catégorie des opérades des résolutions projectives. Deux tels modèles sont équivalents et un objet équivalent à une $Q_\mathtt{P}$-algèbre est encore une $Q_\mathtt{P}$-algèbre.

On dispose de la théorie des opérades de **Koszul** : on peut définir pour toute opérade quadratique $\mathtt{P}$ (ie. munie d'une présentation où les relations sont quadratiques) son opérade duale de Koszul $\mathtt{P}^!$. Quand l'opérade est de Koszul, on peut construire à partir de $\mathtt{P}^!$ un modèle cofibrant explicite $\mathtt{P}_\infty$.

Les opérades $\mathtt{Ass}$, $\mathtt{Com}$, $\mathtt{Lie}$ et beaucoup d'autres sont de Koszul. Leurs opérades duales respectives sont $\mathtt{Ass}^! = \mathtt{Ass}$, $\mathtt{Com}^! = \mathtt{Lie}$ et $\mathtt{Lie}^! = \mathtt{Com}$. Par exemple, cela entraîne qu'une structure L_∞ sur $\mathfrak{g}$ est donnée par une codérivation de carré nul sur la cogèbre *commutative* ($\mathtt{Lie}^! = \mathtt{Com}$) colibre engendrée par (une suspension de) $\mathfrak{g}$ – c'était une des définition ad-hoc des algèbres L_∞.

Théorème 3.1 (Transfert homotopique)**.** *Les structures $\mathtt{P}_\infty$ sont stables par équivalence homotopique : si $f : V \xrightarrow{\sim} W$ où W est une $\mathtt{P}_\infty$-algèbre, alors il existe une structure de $\mathtt{P}_\infty$-algèbre sur V telle que f s'étende en une ∞-équivalence de $\mathtt{P}_\infty$-algèbres.*

Idée de preuve. Pour démontrer le théorème, on définit par des formules complètement explicites la nouvelle structure sur V, et il s'agit ensuite de vérifier explicitement que ces formules définissent bien une structure $\mathtt{P}_\infty$ et induisent un ∞-quasi-isomorphisme. La difficulté réside aussi dans la définition du modèle cofibrant explicite $\mathtt{P}_\infty$, dans la vérification de la propriété de Koszul de chaque opérade, et dans la description (le cas échéant) de ce qu'est une algèbre $\mathtt{P}_\infty$. On vérifie par exemple que $A_\infty = \mathtt{Ass}_\infty$, $\mathtt{E}_\infty = \mathtt{Com}_\infty$ et $L_\infty = \mathtt{Lie}_\infty$. Cela permet donc de redémontrer (avec des arguments généraux) ce qui était déjà connu sur ces types d'algèbres. □

4 Interactions avec les petits cubes

4.1 Longs nœuds

Soit $n \geq 2m + 2$ deux entiers. On considère une généralisation $\mathrm{Emb}_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ de l'espace des **longs nœuds** : c'est l'espace des plongements qui coïncident avec l'inclusion standard $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ en dehors d'un compact. C'est un ouvert dense de l'espace des longues immersions, et on considère la fibre (homotopique) $\overline{\mathrm{Emb}_c}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ de l'inclusion : c'est l'espace des longs nœuds (de dimension supérieure) trivialisés par des immersions.

Quand $\mathtt{P}$ est une opérade de Koszul, on peut appliquer la théorie de la déformation aux morphismes d'opérades $\mathtt{P} \xrightarrow{\varphi} \mathtt{Q}$. Les déformations en question sont des morphismes $\mathtt{P}_\infty \to \mathtt{Q}$ dont la « restriction » à $\mathtt{P}$ est du type $\varphi + \alpha$. On a alors une dg-algèbre de Lie $\mathrm{Def}(\mathtt{P} \xrightarrow{\varphi} \mathtt{Q})$ dont les éléments de Maurer–Cartan ($d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$) sont en bijection avec les déformations de $\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$.

Théorème 4.1 ([1])**.** *On a, pour $n \geq 2m + 2$,*

$$C_*^{\mathbb{Q}}\big(\overline{\mathrm{Emb}_c}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)\big) \simeq \mathrm{Def}(\mathtt{e}_m \to \mathtt{e}_n).$$

Idée de preuve. Ce théorème est une généralisation de théorèmes antérieurs de Lambrechts, Turchin et Volic (cas $m = 1$). Dans le cas $m = 1$, le complexe de droite est $\mathrm{Def}(\mathtt{Ass} \to \mathtt{Ger}_n)$, qui calcule la « cohomologie de Hochschild » de $\mathtt{Ger}_n$ (analogue à celle des sections 2.2 et 2.3, cf. aussi la section 5). Pour $m > 1$, c'est $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_m \to \mathtt{Ger}_n)$ où $\mu \mapsto \mu$ et $\lambda \mapsto 0$.

- Le calcul de Goodwillie–Weiss, qui sert à approcher les foncteurs « analytiques » par leur « série de Taylor », permet de se ramener (en l'appliquant à $\overline{\mathrm{Emb}_c}(-, \mathbb{R}^n)$) à un calcul de complexes dérivés de morphismes entre bimodules infinitésimaux sur $\mathtt{E}_m$;
- La formalité des opérades $\mathtt{E}_n$ (théorème 2.4) simplifie l'écriture de ces espaces de morphismes dérivés, ce qui permet ensuite de se ramener à des bimodules infinitésimaux sur $\mathtt{Com}$. Ceux-ci ont une description simple en termes de diagrammes sur une catégorie $\Omega = \Delta_-$;
- La théorie des opérades de Koszul (section 3) permet ensuite d'obtenir des modèles cofibrants explicites des diagrammes sur Ω ;
- Enfin, une identification explicite et la description des opérades $H_*(\mathtt{E}_n)$ en termes d'arbres permet de conclure. ☐

L'homologie de l'espace des longs nœuds est, en principe, calculable grâce aux diagrammes de cordes [35]. Ce sont des objets combinatoires qui forment un complexe de chaînes explicite, et dont l'homologie est exactement l'homologie de $\overline{\mathrm{Emb}_c}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ en codimension suffisamment grande. Le calcul de ce complexe est cependant délicat, et le théorème 4.1 permet de trouver de nouvelles classes d'homologie.

4.2 Groupe de Grothendieck–Teichmüller

Une catégorie monoïdale tressée $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ est une catégorie munie d'un produit tensoriel associatif et commutatif à isomorphismes près : $\alpha : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ et $\gamma : A \otimes B \to B \otimes A$ qui vérifient des conditions de cohérence (pentagone, hexagone) ; mais l'on ne demande pas $\gamma^2 = Id$ (contrairement aux catégories monoïdales symétriques). L'opérade $\mathtt{E}_2$ agit sur l'espace classifiant $B\mathcal{C}$ d'une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$, et donc la complétion en groupe de $B\mathcal{C}$ est équivalente à un espace de lacets doubles.

Les **associateurs** de Drinfeld [5] fournissent une manière « universelle » de construire des catégories monoïdales tressées. Ce sont des séries formelles en deux variables qui vérifient certaines équations (hexagone, pentagone... les « mêmes » que les catégories monoïdales tressées). On peut aussi voir l'ensemble $Ass^1(\Bbbk)$ des associateurs comme les isomorphismes entre l'opérade des tresses parenthésées complétée et l'opérade des diagrammes de cordes complétée (les mêmes diagrammes qu'en théorie des nœuds) – cf. Fresse [9].

Par cette description $Ass^1(\Bbbk) = \mathrm{Iso}(A, B)$, le **groupe de Grothendieck–Teichmüller** $GT^1(\Bbbk) = \mathrm{Aut}(A)$ agit librement et transitivement sur $Ass^1(\Bbbk)$: c'est un « protorseur ». Ce groupe décrit (en un certain sens) comment modifier une catégorie monoïdale tressée pour récupérer une nouvelle catégorie monoïdale tressée. On peut également définir les variantes $GT(\Bbbk)$ et $GRT(\Bbbk)$. Le groupe $GT(\mathbb{Q})$ contient le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ – savoir si l'inclusion est stricte est un problème ouvert.

Théorème 4.2 ([5])**.** *L'ensemble des associateurs rationnels $Ass^1(\mathbb{Q})$ est non vide.*

Idée. Drinfel'd construit explicitement un associateur en se servant de la monodromie des équations de Knizhnik–Zamolodchikov, des équations différentielles qui apparaissent dans l'étude de certains modèles de la théorie quantique des champs. Les solutions de cette équation sont à coefficients complexes ; mais Drinfel'd utilise ensuite le fait que $Ass^1(\mathbb{C})$ est un torseur sous l'action de $GT(\mathbb{Q})$ pour obtenir une solution rationnelle. ☐

La preuve de Tamarkin de la formalité dans le cas $n = 2$ (théorème 2.4) utilise ce résultat, en construisant une chaîne de quasi-isomorphismes qui passe par $\hat{B}\hat{U}\mathfrak{t}$, la construction bar (section 5) complétée sur l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{t}$, l'algèbre de Lie de Drinfel'd–Kohno (on peut voir les associateurs de Drinfel'd comme des éléments de $\hat{B}\hat{U}\mathfrak{t}$).

Théorème 4.3 ([37])**.** *Le 0ème groupe de cohomologie de $\mathrm{Def}(\mathtt{E}_2 \xrightarrow{=} \mathtt{E}_2)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{grt}$ du groupe GRT.*

La cohomologie en degré < 0 de ce complexe est nulle ; elle est encore inconnue en degré > 0. La conjecture de Drinfel'd–Kontsevich dit que $H^1(\mathrm{Def}(\mathtt{E}_2 \to \mathtt{E}_2))$ est nul. Si elle s'avérait vraie, cela fournirait une nouvelle preuve du théorème 4.2 de Drinfel'd, ainsi qu'une preuve de la formalité intrinsèque des opérades $\mathtt{E}_2$: toute opérade dont l'homologie est $\mathtt{e}_2$ serait automatiquement formelle (et donc $\simeq \mathtt{e}_2 \simeq \mathtt{E}_2$).

Grâce à la formalité des opérades $\mathtt{E}_2$, on sait que ce complexe est égal à $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_2 \to \mathtt{Ger}_2)$. Willwacher étudie plus généralement $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_n \to \mathtt{Ger}_n)$. Le calcul de la cohomologie de ce complexe est un autre problème ouvert.

5 Complexes bar itérés

Quand $\mathtt{P}$ est de Koszul, on peut définir la cohomologie des algèbres sur $\mathtt{P}$ en s'inspirant de la construction d'André–Quillen, via un foncteur dérivé du foncteur des dérivations pour obtenir $H^*_{\mathtt{P}}(A;M)$, où A est une $\mathtt{P}$-algèbre et M est un module sur A (défini de manière analogue aux modules sur les algèbres usuelles). On a alors $H^*_{\mathtt{P}}(A;A) \cong H(\mathrm{Def}(\mathtt{P} \to \mathtt{End}_A))$. On peut définir l'homologie des $\mathtt{P}$-algèbres de manière duale.

Le complexe bar $BA = (\bigoplus_n (\Sigma A)^{\otimes n}, b')$ d'une dg-algèbre associative A est une construction standard en algèbre homologique, utilisée (entre autres) pour définir la cohomologie de Hochschild $HH^*(A) = H(\mathrm{Hom}(BA, A), b'')$ (section 2.2, $b = b' + b''$), et cette cohomologie de Hochschild est isomorphe à $H^*_{\mathtt{Ass}}(A;A)$. Quand A est commutative, le produit shuffle $\sqcup\!\sqcup$ sur BA en fait à son tour une dg-algèbre commutative, et on peut itérer la construction pour avoir un endofoncteur B^n de la catégorie des dg-algèbres commutatives.

Théorème 5.1 ([8])**.** *Le foncteur B^n s'étend aux algèbres $\mathtt{E}_n$ et $H^{\mathtt{E}_n}_*(A) \cong H_*(\Sigma^{-n} B^n A)$ pour les algèbres cofibrantes A.*

Théorème 5.2 ([6])**.** *Quand A est une algèbre de Poisson et M un module sur A, on peut définir deux différentielles b et ∂_λ sur $\mathrm{Hom}(BA, M)$ qui en font un bicomplexe, et on a $H^*_{\mathtt{Poi}}(A;M) \cong H(\mathrm{Hom}(BA, M), b + \partial_\lambda)$.*

Dans le mémoire de master de l'auteur [15], un complexe $C^*(A;M) = (\mathrm{Hom}(B^n A, M), b + \partial_\lambda)$ qui calcule la cohomologie $H^*_{\mathtt{Ger}_n}(A;M)$ est introduit. La définition de ce complexe s'inspire de la définition du complexe qui calcule l'homologie de Poisson, et le fait que si A est une $\mathtt{Ger}_n$-algèbre, alors BA est une $\mathtt{Ger}_{n-1}$-algèbre. La preuve s'appuie aussi sur des résultats intervenant dans la preuve du théorème sur l'homologie des algèbres $\mathtt{E}_n$ (se rappeler aussi du théorème 2.2). Ce complexe s'étend en un complexe $C^*(\Phi)$, pour tout morphisme d'opérades $\mathtt{Ger}_n \xrightarrow{\Phi} \mathtt{P}$, avec en particulier $C^*(\mathtt{Ger}_n \to \mathtt{End}_A) \cong C^*(A;A)$.

Théorème 5.3. *Le complexe $C^*(\Phi)$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_n \xrightarrow{\Phi} \mathtt{P})$.*

L'intérêt de ce complexe est qu'il dispose d'une description simple à l'aide d'arbres de hauteur n, et la différentielle b est définie de manière explicite (∂_λ a une description plus complexe qui passe par des idempotents eulériens). Des calculs pourraient alors peut-être permettre d'obtenir de nouveaux résultats sur les questions de la section 4. On peut également penser que des techniques similaires pourraient donner des résultats sur l'homologie de factorisation (un raffinement de l'homologie de Hochschild supérieure donnant des invariants des variétés).

5.1 Exemple de calcul

Cette description de la cohomologie $\mathtt{E}_n$ permet de donner une autre preuve d'un théorème de [19, §3.4].

On considère d'abord l'algèbre associative $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ où $\deg_* x_i = 0$ (que l'on peut voir comme $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$). Alors le théorème de [12] montre que la cohomologie de Hochschild de A est donnée par :

$$S := HH^*(A;A) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n],$$

où $\deg_* \xi_i = -1$ (ie. $\xi_i \in H^1(A;A)$). C'est une algèbre de Gerstenhaber (cf. section 2.2), et le théorème donne $\{x_i, x_j\} = 0$, $\{\xi_i, \xi_j\} = 0$ et $\{x_i, \xi_j\} = \delta_{i,j}$ (on peut voir ξ_i comme un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, correspondant à $\partial/\partial x_i$).

Théorème 5.4 ([19, Theorem 5])**.** *La cohomologie $\mathtt{E}_2$ de S est triviale : $H^*_{\mathtt{E}_2}(S;S) \cong \mathbb{R}$ concentré en degré 0.*

On rappelle la forme du complexe $C^*(S;S)$:

$$\big(\mathrm{Hom}((B^2 S, b' + \partial'_\lambda), S), b'' + \partial''_\lambda\big).$$

On utilise en fait ici une extension aux algèbres unitaires du complexe (donc en fait $BS = \bigotimes_{n \geq 0} (\Sigma S / 1_S)^{\otimes n}$). On peut vérifier que ce complexe calcule toujours la cohomologie $\mathtt{E}_2$ unitaire.

On note $y_i = \Sigma^2 x_i$ et $\eta_j = \Sigma^2 \xi_j$ les suspensions de x_i et ξ_j (ie. $\deg_* y_i = 2$, $\deg_* \eta_j = 1$). Alors il est connu [8, Prop. 6.3] que l'on a un quasi-isomorphisme ($\mathbb{R}$ est un corps de caractéristique nulle) :

$$\nabla : \mathbb{R}[y_i, \eta_j] \xrightarrow{\sim} (B^2 S, b'),$$

avec $y_i \mapsto ((x_i))$ et $\eta_j \mapsto ((\xi_j))$ (on voit ces éléments de $B^2 S$ comme des arbres à une feuille). Il induit :

$$\varphi : \mathrm{Hom}((B^2 S, b'), S) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[y_i, \eta_j], S).$$

On utilise la structure modèle projective sur les complexes de chaînes non-bornés. Le complexe S est fibrant (comme tous les complexes) ; la différentielle de $\mathbb{R}[y_i, \eta_j]$ est nulle et $\mathbb{R}$ est un corps, donc $\mathbb{R}[y_i, \eta_j]$ est cofibrant ; enfin, le complexe $(B^2 S, b'')$ est borné inférieurement (et $\mathbb{R}$ est un corps) donc il est cofibrant [14, Lemma 2.3.6]. Il s'ensuit que $\varphi = \nabla^*$ est un quasi-isomorphisme.

Grâce à la forme explicite de b'' et le fait que l'image de ∇ ne contient que des arbres de type « corolle », on obtient $b'' \nabla = 0$, d'où $\varphi b'' = 0$ et donc on a toujours un morphisme de complexes :

$$\begin{aligned} \varphi : \big(&\mathrm{Hom}((B^2 S, b'), S), b''\big) \\ &\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[y_i, \eta_j], S). \end{aligned} \tag{5.1}$$

On peut munir $B^2 S$ d'une filtration (croissante) par le nombre de feuilles de l'arbre, ce qui induit une filtration décroissante sur le terme de gauche (en prenant les éléments du Hom qui s'annulent sur la filtration précédente), et on vérifie que b' laisse la filtration stable alors que b'' augmente strictement la filtration. De même, on munit $\mathbb{R}[y_i, \eta_j]$ de la filtration croissante par le degré polynomial, ce qui de même munit le terme de droite d'une filtration décroissante. Le morphisme φ respecte les filtrations par construction.

Les conditions sur b', b'' et la filtration implique que sur les pages E^0 des suites spectrales associées, on obtient :

$$\mathrm{Hom}((B^2 S, b'), S) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[y_i, \eta_j], S).$$

Or on sait que ce φ est un quasi-isomorphisme, donc on obtient un isomorphisme sur les pages E^1. De plus, les générateurs y_i et η_j sont de degrés *strictement* positifs alors que les générateurs de S sont de degré négatif, donc la filtration de droite est bornée en chaque degré (chaque morphisme de degré homogène a un support fini). On peut de plus scinder les complexes en considérant le poids en ξ des applications (ie. les f tels que $\omega_\xi(f(u)) = \omega_\xi(u) + r$ pour r fixé), et la filtration de gauche devient elle aussi bornée en chaque degré. On obtient donc que (5.1) est un quasi-isomorphisme.

On considère la suite spectrale associée au bicomplexe $(\mathrm{Hom}(B^2S, S), b, \partial_\lambda)$; ce qui précède montre que sa page E^1 est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}[y_i, \eta_j], S)$ muni de la différentielle induite par ∂_λ. Un calcul montre que $\partial'_\lambda \nabla = 0$ (l'image du crochet est incluse dans $\mathbb{R} \cdot 1$), donc $\varphi \partial'_\lambda = 0$. Il ne reste donc qu'à déterminer ∂''_λ pour pouvoir calculer $H^*_{\mathtt{E}_2}(S; S)$.

Si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[y_i, \eta_j], S)$, alors en se servant de la forme explicite de φ on trouve :

$$(\partial''_\lambda f)(z_1 \dots z_k) = \sum_i \pm \{f(z_1 \dots \hat{z}_i \dots z_k), \Sigma^{-2} z_i\},$$

où $z_1, \dots, z_k$ sont des monômes (x_i ou ξ_j). En se servant de la relation de Leibniz et de $\{x_i, \xi_j\} = \delta_{i,j}$, on trouve :

$$\{-, x_i\} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \qquad \{-, \xi_j\} = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Or, vus les degrés, on obtient l'identification (tous les morphismes de degré homogène ont un support fini) :

$$\mathbb{R}[x_i, \xi_j, \eta_k^\vee, y_l^\vee] \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}[y_i, \eta_j], S),$$

où $\deg_* \eta_k^\vee = -1$ et $\deg_* y_l^\vee = -2$. Via cette identification, on obtient, pour

$$p(x, \xi) \cdot \omega(\eta, y) \in \mathbb{R}[x_i, \xi_j] \otimes \mathbb{R}[\eta_k^\vee, y_l^\vee],$$
$$\partial''_\lambda (p \cdot \omega) = \sum_i \pm \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \eta_i \omega + \pm \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \cdot y_j \omega.$$

En posant (de manière formelle) $\mathrm{d}x_i = \eta_i^\vee$ et $\mathrm{d}\xi_j = y_j^\vee$, on reconnaît le complexe de de Rham de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ (c'est une super-variété algébrique $\mathbb{Z}$-graduée ; intuitivement, cette variété est contractile). On peut identifier ce complexe final à

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{R}[x_i, \mathrm{d}x_i] \otimes \mathbb{R}[\xi_i, \mathrm{d}\xi_i], \partial \right),$$

où ∂ est l'unique dérivation qui étend $x_i \mapsto \mathrm{d}x_i$, $\xi_i \mapsto \mathrm{d}\xi_i$. C'est un complexe de Koszul standard du type $S(V) \otimes \Lambda(V^*)$, qui est acyclique, donc la page E^2 de la suite spectrale associée au bicomplexe est isomorphe à $\mathbb{R}$ en bidegré $(0, 0)$ et on obtient l'effondrement de la suite.

La suite spectrale du bicomplexe est une suite spectrale cohomologique dans le premier quadrant, donc elle converge. Elle dégénère à la page E^2, et finalement on trouve :

$$H^*_{\mathtt{E}_2}(S; S) \cong \mathbb{R} \text{ (en degré 0)}.$$

Kontsevich cherche en fait à calculer le premier groupe de cohomologie du complexe de déformations de S. Or on a [19, §2.7] une suite exacte courte de complexes $0 \to \Sigma S \to \mathrm{Def}(S) \to C^*_{\mathtt{E}_2}(S; S) \to 0$. La suite exacte longue en cohomologie et l'acyclicité de $C^*_{\mathtt{E}_2}(S; S)$ montre alors que $H^1(\mathrm{Def}(S)) \cong S_{-2}$, les polynômes de degré 2 en ξ_i dans S (en d'autres termes, les champs de bivecteurs sur $\mathbb{R}^n$). On retrouve ainsi le résultat de Kontsevich.

Références

[1] Arone G. and Turchin V., *Graph-complexes computing the rational homotopy of high dimensional analogues of spaces of long knots*, Ann. Inst. Fourier, **65** (2015), 1–62.

[2] Berger C. and Fresse B., *Combinatorial operad actions on cochains*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **137** (2004), 135–174.

[3] Boardman J. M. and Vogt R. M., *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics 347 (1973). Berlin Heidelberg, Springer.

[4] Cohen F. R., *The homology of $\mathscr{C}_{n+1}$ spaces, $n \geq 0$*, The homology of iterated loop spaces, Lecture Notes in Mathematics **533** (1976), 207–351. Berlin Heidelberg, Springer.

[5] Drinfel'd V. G., *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra i Analiz, **2** (1990), 149–181.

[6] Fresse B. *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, Ann. Math. Blaise Pascal, **13** (2006), 237–312.

[7] Fresse B., *Modules over operads and functors*, Lecture Notes in Mathematics 1967 (2009). Springer-Verlag, Berlin.

[8] Fresse B., *Iterated bar complexes of E-infinity algebras and homology theories*, Algebr. Geom. Topol., **11** (2011), 747–838.

[9] Fresse B., *Homotopy of Operads and Grothendieck-Teichmüller Groups*, Preprint. http ://math.univ-lille1.fr/ fresse/OperadHomotopyBook/.

[10] Fresse B. and Willwacher T., *The intrinsic formality of E_n-operads*, Preprint.

[11] Ginzburg V. and Kapranov M., *Koszul duality for operads*, Duke Math. J., **76** (1994), 203–272.

[12] Hochschild G. and Kostant B. and Rosenberg A., *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **102** (1962), 383–408.

[13] Hoefel E., *OCHA and the swiss-cheese operad*, J. Homotopy Relat. Struct., **4** (2009), 123–151.

[14] Hovey M., *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs 63 (1999), American Mathematical Society.

[15] Idrissi N., *Homologie et complexes de déformations d'opérades E_n*, Mémoire de master, Université Paris 7 (2014). http ://math.univ-lille1.fr/ idrissi/files/m2.pdf.

[16] Idrissi N., *Swiss-Cheese operad and Drinfeld center*, Preprint.

[17] Kajiura H. and Stasheff J., *Homotopy algebras inspired by classical open-closed string field theory*, Comm. Math. Phys., **263** (2006), 553–581.

[18] Kaufmann R. M., *A proof of a cyclic version of Deligne's conjecture via cacti*, Math. Res. Lett., **15** (2008), 901–921.

[19] Kontsevich M., *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys., **48** (1999), 35–72.

[20] Kontsevich M., *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys., **66** (2003), 157–216.

[21] Kontsevich M. and Soibelman Y., *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon). Dordrecht (2000). Math. Phys. Stud., Kluwer Acad. Publ., 255–307.

[22] Lazard M., *Lois de groupes et analyseurs*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **72** (1955), 299–400.

[23] Loday J. L. and Vallette B., *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] **346** (2012), Heidelberg, Springer.

[24] Lambrechts P. and Volic I., *Formality of the little N-disks operad*, Mem. Amer. Math. Soc., **230** (2014), viii+116 pages.

[25] Mac Lane S., *Categorical algebra*, Bull. Amer. Math. Soc., **71** (1965), 40–106.

[26] Markl M., *Homotopy algebras are homotopy algebras*, Forum Math., **16** (2004), 129–160.

[27] May J. P., *The geometry of iterated loop spaces*, Lectures Notes in Mathematics 271 (1972). Springer-Verlag Berlin.

[28] McClure J. E. and Smith J. H., *A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture*, Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000). Amer. Math. Soc. **293** (2002), 153–193.

[29] Salvatore P., *The topological cyclic Deligne conjecture*, Algebr. Geom. Topol., **9** (2009), 237–264.

[30] Salvatore P. and Wahl N., *Framed discs operads and Batalin–Vilkovisky algebras*, Q. J. Math., **54** (2003), 213–231.

[31] Stasheff J. D., *Homotopy associativity of H-spaces*, Thesis, Princeton University (1961), 116 pages.

[32] Tamarkin D. E., *Another proof of M. Kontsevich formality theorem*, Penn. State University (1998).

[33] Tamarkin D. E., *Formality of chain operad of little discs*, Lett. Math. Phys., **66** (2003), 65–72.

[34] Tradler T. and Zeinalian M., *On the cyclic Deligne conjecture*, J. Pure Appl. Algebra, **204204** (2006), 280–299.

[35] Vassiliev, V. A., *Cohomology of knot spaces*, Theory of singularities and its applications, Amer. Math. Soc., (1990), 23–69.

[36] Voronov A. A., *The Swiss-cheese operad*, Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), Contemp. Math., Amer. Math. Soc., **239** (1999), 365–373.

[37] Willwacher T., *M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck–Teichmüller Lie algebra*, Invent. Math., **200** (2014), 671–760.

Najib Idrissi
Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1 et CNRS, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail address: najib.idrissi-kaitouni@math.univ-lille1.fr