Introduction aux spectres de Balmer

mercredi 16 octobre 2024 15:03

Introduction

Principe général $\left\{ \begin{array}{c} \text{objet} \\ \text{géométrique} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{structure} \\ \text{algébrique} \end{array} \right\}$ ex cohomologie

parfois réversible ; ex : espaces de modules

Ex Spectre d'un anneau

Pour un anneau A, on veut construire un espace "universel" tq $A = f^\circ$ sur cet espace

$\hookrightarrow \operatorname{Spec}(A) = \{ \mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ idéal premier} \}$

Pour $f \in A$, on définit une "fonction" F_f par $F_f(\mathfrak{p}) = [f] \in A/\mathfrak{p}$

$\operatorname{supp}(f) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p} \} = \{ F_f \neq 0 \}$

$\Rightarrow$ définit une base d'ouverts sur $\operatorname{Spec} A$

ex $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{ 0, 2, 3, 5, \ldots \}$, $F_{57}(2) = 1$, $F_{57}(3) = 0$ etc

but : généraliser / catégorifier cette notion aux cat tenseur - triangulées

$\{ \text{cat tens-triang} \} \rightsquigarrow \{ \text{spectre de Balmer} \}$

Regroupe des constructions pour les anneaux, les schémas, les rep gp, C^*-alg, motifs ....

Définitions

ex A anneau $\rightarrow$ $A\text{-Mod}$: catégorie abélienne

$\Rightarrow \operatorname{Ch}(A\text{-Mod})$ catégorie des cx de chaînes

$\Rightarrow D(A) = \operatorname{Ch}(A\text{-Mod})[\text{qiso}^{-1}]$

$D(A)$ est additive mais pas abélienne en général

Il reste • suspensions • suites exactes (ou suite de cofibres)

def [Grothendieck - Verdier, Puppe] Une catégorie triangulée est :

- une catégorie additive T (ie, $\operatorname{Hom}(A,B)$ est un gp abélien, $\circ$ est un morphisme de gp et il y a un objet 0)
- une auto-équivalence $\Sigma : T \xrightarrow{\sim} T$
- une classe de triangles distingués $\{ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \}$

Rk $\operatorname{cone}(f)$ est iso à Z mais de manière non canonique

• une classe de triangles distingués { ... }

Rk $\mathrm{cone}(f)$ est iso à Z mais de manière non canonique

Rk [Lurie] $\mathrm{Ho}(\infty\text{cat stable}) =$ cat triangulée

$$\left\{\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \Sigma Y \end{tikzcd}\right\}, \quad \left\{\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \mathrm{cone}(f) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}\right\}$$

def **Catégorie tenseur-triangulée** $^{(tt)}$: $(T, \otimes, \mathbb{1})$, $\otimes$: sym mon, $\mathbb{1}$: unité
tq $- \otimes -$ est exact en chaque variable

ex 1) A : anneau $\to$ $D(A)$ est tt avec $(- \otimes^{L}_{A} -, A)$

2) X schéma $\Rightarrow$ $(D(QCoh_X), \otimes^{L}, \mathcal{O}_X)$ est tt

3) G groupe fini $\Rightarrow$ $(D(\mathbb{K}[G]\text{-Mod}), - \otimes_{\mathbb{K}} -, \mathbb{K})$ est tt

4) $(Sp, \wedge, \mathbb{S})$ est la tt-cat "initiale"

stabilisation de $Top(w^{-1}) \underset{\Sigma}{\overset{\Omega}{\rightleftarrows}} Top[w^{-1}]$

objets : $\{E(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ + $E(n) \simeq \Omega E(n+1)$

Spectre de Balmer

Une sous-cat $I \subseteq T$ est **triangulée** si
pour tout triangle $\{X \to Y \to Z \to \Sigma X\}$, si 2 objets sont dans I alors la 3e aussi

Elle est **épaisse** si $X \oplus Y \in I \Leftrightarrow X, Y \in I$

C'est un **idéal** si $\forall K \in T$, $K \otimes I \subseteq I$

Hypothèse On suppose que $\mathcal{T}$ est essentiellement petite
Par exemple, on peut prendre la sous-cat
$\mathcal{T}^c = \{$ objets compacts de $\mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{T}$
ou rigide ?

ex 1) $K^b(A\text{-proj}) = \{$ cx bornés fgen proj $\}$

2) $D^{perf}(X)$ pour un schéma X

3) $D^b(\mathbb{K}[G]\text{-Mod})$

4) Sp^{ω} : spectres finis

Un idéal $p \subseteq \mathcal{T}^c$ est **premier** si $\forall X, Y \in \mathcal{T}^c$, $X \otimes Y \in p \Rightarrow X \in p$ ou $Y \in p$

Un idéal $p \subseteq \mathcal{T}^c$ est premier si $\forall X, Y \in \mathcal{T}^c$, $X \otimes Y \in p \Rightarrow X \in p$ ou $Y \in p$

def [Balmer] $\mathrm{Spec}^B(\mathcal{T}^c) = \{ p \subseteq \mathcal{T}^c \mid p \text{ premier} \}$

Pour $X \in \mathcal{T}^c$, $\mathrm{supp}(X) = \{ p \in \mathrm{Spec}^B(\mathcal{T}^c) \mid X \notin p \}$ $\rightsquigarrow$ topologie ! vérifie une propriété universelle

Motivation

- Classifier les objets à $\oplus$, Δ, $\otimes$ près $\Rightarrow$ les idéaux arrivent naturellement
- Localisations : $\{ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}^c \text{ idéaux épais} \} \rightsquigarrow \{ \text{quotients } \mathcal{T}^c \xrightarrow{L_{\mathcal{I}}} \mathcal{T}^c / \mathcal{I} \}$

(analogie : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p$) [Devinatz - Hopkins - Smith]

Exemple

Géométrie algébrique

Thm [Hopkins 87, Neeman 92, Thomason 97] Soit X un schéma quasi-séparé quasi-compact

Il y a un homéo $X \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Spec}^B(D^{perf}(X))$, $x \longmapsto p(x) = \{ Y \in D^{perf}(X) \mid Y_x = 0 \}$

cor Pour un anneau A, $\mathrm{Spec}\, A \simeq \mathrm{Spec}(K^b(A\text{-proj}))$

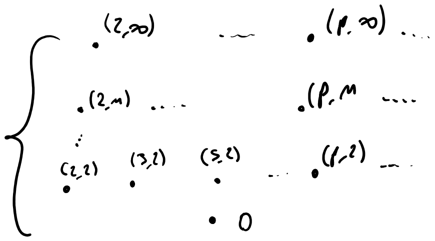
cor X, Y schémas qsqc, si $D^{perf}(X) \simeq D^{perf}(Y)$ comme sym mon, alors $X \simeq Y$

Rk Si $\mathcal{D}$ génère $\mathcal{T}^c$ comme cat épaisse

Alors [Mukai 81] On peut récupérer $D^{perf}(X)$ sans le $\otimes$

Homotopie stable

[Hopkins - Smith 86] $\mathrm{Spec}^B(Sp^\omega) =$



$\mathcal{O} = \ker(Sp^\omega \to Sp^\omega_{\mathbb{Q}})$

$(p, \infty) = \ker(Sp^\omega \to Sp^\omega_{(p)})$ $\qquad (p, n) = \ker(Sp^\omega \to Sp^\omega_{p\,2n} \; ?)$

Th des repr

G gr fini. $\mathbb{K}$ corps $\qquad$ (si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ alors $\mathbb{K}G$-Mod est semisimple)

[illegible]

G gp fini, $\mathbb{K}$ corps (si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid |G|$ alors $\mathbb{K}G$-Mod est ssimple)

$\mathbb{K}G\text{-StMod} = \mathbb{K}G\text{-Mod} / \mathbb{K}G\text{-proj} \Rightarrow$ catégorie tt

Rk $\simeq D^b(\mathbb{K}G\text{-Mod}) / D^{perf}(\mathbb{K}G\text{-Mod})$

Thm [Benson - Carlson - Rickard] $\mathrm{Spec}^B(\mathbb{K}G\text{-Mod}) \cong \mathrm{Proj}(H^*(G;\mathbb{K}))$

Exposés possibles

1) ∞ Catégories, stables $\longrightarrow$ Juan / Yonatan

2) ∞ cat monoïdales $\rightsquigarrow$ Clovis

3) Spectre de Balmer : propriétés, Hopkins - Neeman $\longrightarrow$ Filipp

4) Calcul de $\mathrm{Spec}(Sp^{\omega})$ [Hopkins - Smith 98] $\longrightarrow$ Vitor ?

5) Choses plus avancées sur le spectre de Balmer

6) Th des représentations