1) Introduction aux ∞-catégories
2) Limites et colimites
3) ∞-catégories stables

Plan

1) Introduction aux ∞-cat stables

Pour nous, ∞-cat $= (\infty, 1)$-cat
objets, 1-morphismes, $\underbrace{\text{2-morphismes} \ldots}_{\text{inversibles}}$

Plusieurs modèles : quasi-catégories, espaces de Segal complets, catégories de Segal…

Définitions et premières propriétés

déf Une ∞-catégorie est un ensemble simplicial C tq

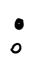
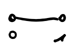
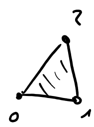
$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\forall"] \arrow[d, hook] & C \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd} \quad \forall 0 < i < n$$

Rappels sur les ensembles simpliciaux

Δ = catégorie des simplexes objets = ordinaux finis non vides
$[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$
mor = applications qui préservent l'ordre (faiblement)

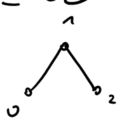
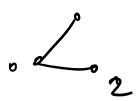
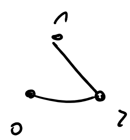
Ensemble simplicial = préfaisceau sur Δ, ie, $X : \Delta^{op} \to Set$
$\hookrightarrow$ catégorie : $sSet = Fun(\Delta^{op}, Set)$

C'est la même chose qu'une famille d'ensemble $X_0, X_1, \ldots$
+ fonctions " faces " $d_i : X_n \to X_{n-1}$
+ fonctions " dégénérescences " $s_j : X_n \to X_{n+1}$

ex $\Delta^n = Hom_\Delta(-, [n])$ Δ^0 :  , Δ^1 :  , Δ^2 : 

ex $\partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$, contient seulement les applis non surjectives

ex $\Lambda^n_i \subseteq \partial\Delta^n$: applis dont l'img ne contient pas $[n] \setminus \{i\}$

Λ^2_1 :  , Λ^2_0 :  , Λ^2_2 : 

Rq Yoneda $\Rightarrow$ $\{\sigma : \Delta^n \to X\} \xleftrightarrow{1:1} \sigma \in X_n$

lemme Tout préfaisceau est une colimite de représentables

$\Rightarrow$ si $X \in sSet$, alors on peut le reconstruire en recollant des Δ^n

$$X = \underset{[n]\in\Delta/X}{\mathrm{colim}}\ \Delta^n$$

On dit que X est un **complexe de Kan** si
$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\forall"] \arrow[d] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\, 0 \leq i \leq n$$

Espace topologiques comme ∞-cat

Réalisation géométrique = foncteur $sSet \to Top$, $\Delta^n \mapsto |\Delta^n|$, préserve les colim

Ce foncteur a un adjoint à droite $\mathrm{Sing}(X)_n = \mathrm{Hom}_{Top}(|\Delta^n|, Top)$

lemme $\forall X \in Top$, $\mathrm{Sing}(X)$ est un complexe de Kan

preuve
$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sing}(X) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \underset{\text{adj}}{\Longleftrightarrow} \begin{tikzcd} {|\Lambda^n_i|} \arrow[r] \arrow[d] & X \\ {|\Delta^n|} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$
or $|\Lambda^n_i|$ est un retract de $|\Delta^n|$

$\Longrightarrow \mathrm{Sing}(X)$ est une ∞-cat

Th [Quillen] L'adjonction $|-| : sSet \rightleftarrows Top : \mathrm{Sing}$ identifie les cx de Kan avec les CW complexes à équivalence d'homotopie près

Catégories comme ∞-cat

Catégorie homotopique : unique foncteur $h : sSet \to Cat$, $\Delta^n \mapsto [n]$, préserve les colim

Admet un adjoint à droite $N : Cat \to sSet$, $(N\mathcal{C})_n = \mathrm{Hom}_{Cat}([n], \mathcal{C})$

Concrètement, $(N\mathcal{C})_0 = \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $(N\mathcal{C})_1 = \mathrm{mor}\,\mathcal{C}$, $(N\mathcal{C})_2 = \{(g,f) \mid g\circ f \text{ existe}\}$ etc

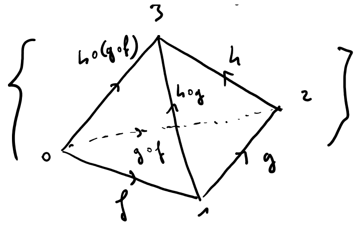
faces : $d_i(\cdots \xrightarrow{f_i} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots) = (\cdots \xrightarrow{f_{i+1} f_i} \cdots)$

dégén : $s_j(\cdots \xrightarrow{f_j} \xrightarrow{f_{j+1}} \cdots) = (\cdots \xrightarrow{f_j} \xrightarrow{id} \xrightarrow{f_{j+1}} \cdots)$

prop $X \in sSet$ est le nerf d'une catégorie $\Leftrightarrow$
$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\forall"] \arrow[d] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\, 0 < i < n$$

idée $\Rightarrow$ si $X = N\mathcal{C}$, $\{\Lambda^2_1 \to N\mathcal{C}\} = \{\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot\}$, s'étend en
$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "g"] & \\ \cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & \cdot \end{tikzcd}$$

$\{\Lambda^3_2 \to N\mathcal{C}\} = \{$ 3, $h\circ(g\circ f)$, $h\circ g$, h, 2 $\}$ $\Rightarrow$ la compos° est asso

$\{\Lambda^3_2 \to N\mathcal{C}\} = \Big\{$  $\Big\}$ $\Rightarrow$ la compos° est assoc

idem pour $\Lambda^3_1 \to N\mathcal{C}$

$\Leftarrow$ on pose $\mathrm{ob}\,\mathcal{C} = X_0$, $\mathrm{mor}\,\mathcal{C} = X_1$, compos° = remplissage de Λ^2_1, etc

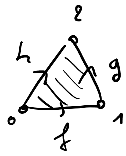
En particulier, $N\mathcal{C}$ est tjrs une ∞-cat

Retour aux ∞-cat en général

Les ∞-cat regroupent les catégories et la théorie de l'homotopie

Notions catégoriques :

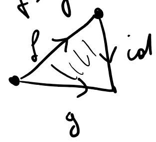
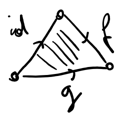
pour une ∞-cat C :

- $\mathrm{ob} = C_0$ $\qquad$ • $\mathrm{mor}\,C = C_1$
- on dit que h est une composée de f et g si $\exists\, \sigma \in X_2$ de la forme 

  la condition de Kan faible garantit l'existence d'une composée, mais pas l'unicité

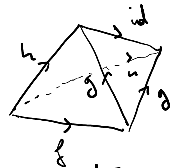
  (on a seulement unicité à homotopie près)

Notions topologiques

deux morphismes $f, g : X \to Y$ sont homotopes s'il existe un 2-simplexe de la forme  ou 

$\hookrightarrow$ la condition de Kan faible implique que cela déf une rel° d'équ

lemme Si h et h' sont deux composées de f et g, alors $h \simeq h'$

preuve  on relève, la face du fond donne une htpie entre h et h'

prop la catégorie homotopique d'une ∞-cat C est donnée par :

$\mathrm{ob}(hC) = C_0$, $\quad \mathrm{mor}(hC) = C_1/\simeq$

Un morphisme $f : X \to Y$ est une équivalence si $\exists g$ tq $fg \simeq \mathrm{id}$, $gf \simeq \mathrm{id}$

$\Leftrightarrow [f]$ est un iso dans hC

Un ∞-groupoïde est une ∞-cat dont les mor sont tous des équivalences

Un ∞-groupoïde est une ∞-cat dont les mor sont tous des équivalen

Thm (Homotopy hypothesis) $X \in sSet$ est un complexe de Kan $\Leftrightarrow$ X est un ∞-gpd

Foncteurs et mapping spaces

Un foncteur $C \to D$ entre ∞-cat est un morphisme d'ensembles simpliciaux

lemme Si $K \in sSet$, $C : \infty$-cat, alors $Fun(K,C)_n = Hom_{sSet}(K \times \Delta^n, C)$ est une ∞-cat

Rq Si A, B sont des cat ordinaires, alors $N\,Fun(A,B) \simeq Fun(NA, NB)$

prop C est une ∞-cat $\Leftrightarrow$ $i^* : Fun(\Delta^2, C) \longrightarrow Fun(\Lambda^2_1, C)$ est une fibration de Kan triviale

cor $\forall\, x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \in \mathcal{C}$, l'espace $Comp(f,g)$ est contractile

$$\begin{tikzcd} Comp(f,g) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Fun(\Delta^2, C) \arrow[d, two heads, "\sim"', "i^*"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "(f,g)"'] & Fun(\Lambda^2_1, C) \end{tikzcd}$$

slogan unicité $\rightsquigarrow$ contractilité

déf $C : \infty$-cat, $x, y \in C$, on pose

$$\begin{tikzcd} Hom_C(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & Fun(\Delta^1, C) \arrow[d] \\ \Delta^0 \arrow[r, "(x,y)"'] & Fun(\partial\Delta^1, C) \end{tikzcd}$$

prop $Hom_C(x,y)$ est un complexe de Kan (donc une ∞-cat)