⚠ Pas fait dans la littérature   On ne choisit pas de modèle particulier pour les ∞-cat

$\mathcal{C}$: ∞-catégorie stable (rappel : objet init = objet final, htpy cartésien ⇔ htpy cocart [−])
⇝ foncteurs de lacets / suspension

Une sous-cat $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$ est épaisse si elle est pleine et :
① elle est stable (close par limite/colimite finies)
② close par rétractions (au niveau des objets ?)

Prop $h\mathcal{I} \subseteq h\mathcal{C}$ épaisse $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$ épaisse

Preuve : rappel : $h\mathcal{I} \subseteq h\mathcal{C}$ est épaisse si ① $\Delta = (a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} \Sigma a)$ les morph vérifient 2 parmi 3
② $a \oplus b \in h\mathcal{I} \Rightarrow a, b \in h\mathcal{I}$
(esquisse)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & 0 \arrow[d] \\ b \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & c \arrow[d, "h"] \\ 0 \arrow[r] & \Sigma a \end{tikzcd} \rightsquigarrow \Delta = (a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} \Sigma a)$$

($\Leftarrow$) $\mathcal{I}$ épaisse : si $\Delta = (a \to b \to c \to \Sigma a)$, alors $a = b \times_c 0 \in \mathcal{I}$ etc ⇒ 2 parmi 3
si $a \oplus b \in h\mathcal{I}$, on a un rétract $\underbrace{a \xrightarrow{i} a \oplus b \xrightarrow{p} a}_{=}$ ⇒ $a \in h\mathcal{I}$, idem pour b

($\Rightarrow$) Supposons que $h\mathcal{I}$ est épaisse
• stable par pushouts :
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \Sigma a \end{tikzcd}$$
(quid de
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b' \arrow[d] \\ b \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$
?)

• stable par rétract : $\underbrace{a \to b \to a}_{=}$ ⇒ ∃
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & b \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$
alors $b \simeq a \oplus c \in h\mathcal{I}$ ⇒ $a \in h\mathcal{I}$ ⇒ $a \in \mathcal{I}$

Soit $\mathcal{C}$ une ∞-cat mon sym stable

Cor Soit $a \in \mathcal{I}$, $b \in \mathcal{C}$, alors $a \otimes b \in \mathcal{I} \Leftrightarrow a \otimes b \in h\mathcal{I}$)
⇒ la notion d'idéal tt se détecte sur $h\mathcal{I}$

Rappel Un idéal tt $\mathcal{I}$ est premier si $a \otimes b \in \mathcal{I} \Rightarrow a \in \mathcal{I}$ ou $b \in \mathcal{I}$

Conséquence Tout est détecté au niveau de $h\mathcal{C}$
⟶ on peut encore déf $\mathrm{Spec}^B(\mathcal{C}) = \{ p \subseteq \mathcal{C} \mid \text{idéal tt premier} \}$
⟶ iso à $\mathrm{Spec}^B(h\mathcal{C})$ des exposés précédents

---

Premier cas particulier : ... $\mathcal{I}$: épaisse engendrée par $\mathbb{1}$

Premier cas particulier :

soit $\mathbb{1} \in \mathcal{C}$ l'unité $\rightsquigarrow \langle \mathbb{1} \rangle$ sous-catégorie épaisse engendrée par $\mathbb{1}$

Hypothèse : $\langle \mathbb{1} \rangle = \mathcal{C}$

prop $\left\{ \begin{array}{c} I \subseteq \mathcal{C} \\ \text{épaisse} \end{array} \right\} \cong \{ \text{idéaux } t \}$ $\to$ ie on peut oublier le $\otimes$

ex c'est le cas pour 1) Sp^{ω} : spectres finis 2) Perf_R : complexes parfaits

preuve Soit $I \subseteq \mathcal{C}$ épaisse

$a \in I$, $b \in \mathcal{C}$ alors $b \simeq \operatorname{colim}_{X_b} \mathbb{1} \Rightarrow a \otimes b \simeq \operatorname{colim}_{X_B} a \otimes \mathbb{1} \in I$ car I est épaisse

$a \otimes -$ est exact

Deuxième cas particulier

Hypothèse $\mathcal{C}$ est une ∞-cat sym mon stable présentable

$\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\omega})$ "compactement engendré"

$\Rightarrow$ on considère $\mathrm{Spec}^B(\mathcal{C}^{\omega})$

Propriété universelle de Sp

Pr^L : ∞-cat présentables & foncteurs qui préservent les colim

St : stabilisation

prop $St : \mathrm{Pr}^L \underset{\perp}{\rightleftarrows} St\mathrm{Pr}^L : U$

Rk Soit $\mathcal{S}$: ∞-cat des espaces $\qquad \mathrm{PSh}(\{*\}, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}$

$\Rightarrow \mathcal{S} \simeq \infty$-cat libre sur un point $\{*\}$

cor $\mathrm{Fun}(Sp, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$ pour $\mathcal{C}$ stable présentable

$F \longmapsto F(\mathbb{S})$

Rq Permet de construire le $\wedge$: $\mathrm{Fun}(Sp, Sp) \simeq Sp$, on peut composer les foncteurs $\mathrm{Fun}(Sp, Sp) \times \mathrm{Fun}(Sp, Sp) \to \mathrm{Fun}(Sp, Sp)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(Sp, Sp) \times \mathrm{Fun}(Sp, Sp) & \to & \mathrm{Fun}(Sp, Sp) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ Sp \times Sp & \longrightarrow & Sp \end{array}$$

Rq $\mathcal{C}$ stable présentable $\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \{ \text{localisations (accessibles) de } \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, Sp) \}$