Filtrations et algèbres CW

jeudi 21 février 2019 15:43

1 Conventions

a) Axiomes

$\mathcal{J}$: catégorie tq

- enrichie sur sSet
- complète et cocomplète (au sens enrichi)
- monoïdale symétrique fermée

$\mathrm{Hom}_{sSet}(K, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X,Y)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(K \times X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y^K)$

Objet initial $\mathbb{i}$, terminal $\mathbb{t}$

Unité de $\otimes$: $\mathbb{1}$ $\rightsquigarrow$ $sSet \xrightarrow{s} \mathcal{J}$

$K \longmapsto K \times \mathbb{1}$

$\rightarrow$ on a D^d, ∂D^d, $D^d/\partial D^d = S^d$ vus comme $\in \mathcal{J}$

<u>ex</u> $\mathcal{J} = sSet$, Top, $sMod_{\mathbb{k}}$, Sp^{Σ}

$sSet_*$, Top_*

$\mathcal{J}$ est pointée si $\mathbb{i} = \mathbb{t}$, qu'on note alors $*$

Pour $\mathcal{J}$ quelconque, $\mathcal{J}_* = (\mathbb{t} \downarrow \mathcal{J})$

$\mathcal{J} \underset{F^+}{\overset{U^+}{\leftrightarrows}} \mathcal{J}$ $\quad F^+(X) = (\mathbb{t} \longrightarrow \mathbb{t} \sqcup X)$

$\Rightarrow$ monade $(-)^+ = F^+U^+$, $Alg^+(\mathcal{J}) \cong \mathcal{J}_+$

$\Rightarrow$ monade $(-)^+ = F^+U^+$, $Alg^+(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}_+$

b) Diagrammes

Soit $\mathcal{G}$: petite cat sym mon

Si $\mathcal{S}$ vérifie les axiomes, alors $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ aussi

avec comme structure monoïdale = convolution de Day

ex ob $\mathcal{G} = \mathbb{N}$, $Hom_{\mathcal{G}}(m,n) = M_{mn}(\mathbb{k})$

déf $\mathcal{D}$ est sifted si $\mathcal{D} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{D}\times\mathcal{D}$ est terminal

ex $[1] \rightleftarrows [2]$ (coeq réflexif) est sifted

c) Opérades

Une opérade $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{C}$ est la donnée d'une famille $\{\mathcal{O}(n)\}_{n\geq 0}$ avec $\Sigma_n \circlearrowright \mathcal{O}(n)$, $\mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{O}(1)$,

$\mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \xrightarrow{\circ_i} \mathcal{O}(n+m-1)$ & axiomes

$$\Rightarrow \text{monade } \mathcal{O} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$X \longmapsto \coprod_{n\geq 0} \mathcal{O}(n) \underset{\Sigma_n}{\otimes} X^{\otimes n}$$

$\rightsquigarrow F^{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \longrightarrow Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$

prop $\mathcal{O}$ est sifted

Opérade non-unitaire : $\mathcal{O}(0) = \mathbb{1}$

Si $\mathcal{O}$ est une opérade, alors $\varepsilon : \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{O}$ est un mφ d'opérade

$$\rightsquigarrow \mathrm{Alg}^{\mathcal{O}(1)}(\mathcal{C}) \underset{\varepsilon^* = U^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)}}{\overset{F^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Alg}^{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$$

$\varepsilon^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)_+$ mφ de monades (pas d'opérade)

id sur $\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(n \geq 2) \longmapsto \mathbb{1}$

$$\Longrightarrow \mathrm{Alg}^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) \underset{(\varepsilon^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)})^*}{\overset{Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Alg}^{\mathcal{O}(1)}(\mathcal{C}_*)$$ indécomposables relatifs

Étant donné $\eta : \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{1}$, indécomposables :

$Q^{\mathcal{O}} : \mathrm{Alg}^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_*$

② Filtrations

a) Définition

$\mathbb{Z}_=$: catégorie discrète sur $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_\leq$: le poset $\mathbb{Z}$ vu comme catégorie

Toutes les deux sym $\otimes$ pour $+$

$\mathcal{S}^{\mathbb{Z}_=}$ = objets gradués $\qquad \mathcal{S}^{\mathbb{Z}_\leq}$ = objets filtrés

Convolution dans $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}_=}$: $(X \otimes Y)(n) = \coprod_{i+j=n} X(i) \otimes Y(j)$

dans $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}_\leq}$:

$$(X \otimes Y)(n) = \operatorname{colim}_{i+j \leq n} X(i) \otimes Y(j)$$

$X \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leq}$ est descendant si $X_0 \xrightarrow{\simeq} X_1 \xrightarrow{\simeq} X_2 \xrightarrow{\simeq} \cdots$

ascendant si $\cdots \xrightarrow{\simeq} X_{-2} \xrightarrow{\simeq} X_{-1} \xrightarrow{\simeq} X_0$

b) Foncteurs

- $\operatorname{colim} \dashv \mathrm{const} \dashv \lim$
- pour $a \in \mathbb{Z}$, on a aussi $a_! \dashv a_* \dashv a^* \dashv a^!$

↳ n'existe que si $\mathcal{C}$ est pointée

$$a^* X = X_a$$

$$(a_* X)_n = \begin{cases} * & \text{si } n < a \\ X & \text{si } n \geq a \end{cases}$$

$$(a^! X)_n = \begin{cases} X & \text{si } n \leq a \\ * & \text{si } n > a \end{cases}$$

$$a_! X = \operatorname{colim} \begin{pmatrix} X_{-1} \longrightarrow \operatorname{colim} X \\ \downarrow \\ * \end{pmatrix}$$

$$= \text{“} \operatorname{colim} X / X_{-1} \text{”}$$

↳ a priori pas inj

- gr : $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_{\leq}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{Z}_{=}}$
  $X \longmapsto \mathrm{gr}\, X$
  où $(\mathrm{gr}\, X)_n = \mathrm{colim}(\mathbb{1} \longleftarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n)$

Rk pointé : $\mathbb{1} \longrightarrow (\mathrm{gr}\, X)_n$

gr admet un adjoint à droite
u : $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_{=}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{Z}_{\leq}}$
$X \longmapsto uX$
où $(uX)_n = U^{+}(X_n)$
$X_{n-1} \rightarrow \mathbb{1} \rightarrow X_n$
pour les app°

c) Monoïdalité

- colim : strict $\otimes$
- const : lax $\otimes$
- a^*, $a \leq 0$: lax $\otimes$ non unitaire
- a_*, $a \geq 0$: lax $\otimes$ non unitaire
- 0^*, 0_* : strict $\otimes$
- $a_!$: lax sur les objets descendant
- gr est str $\otimes$
- u est lax $\otimes$

d) Algèbres filtrées

d) Algèbres filtrées

$$\left.\begin{array}{l} O_* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\leqslant} \\ O_*^{\circ +} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_*^{\leqslant} \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} Op(\mathcal{C}) \longrightarrow Op(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant}) \\ Op(\mathcal{C}) \longrightarrow Op(\mathcal{C}_*^{\mathbb{Z}_\leqslant}) \end{array}$$

Si $\mathcal{O}$ est une opérade $\in Op(\mathcal{C})$, une $\mathcal{O}$ - algèbre filtrée est une algèbre sur $O_*\mathcal{O}$, catégorie $Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant})$

On a des foncteurs

$$\begin{tikzcd} Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant}) \arrow[r, shift left, "gr"] \arrow[d, shift left] & Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_=}) \arrow[l, shift left, "u"] \arrow[d, shift left] \\ \mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant} \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left, "gr"] & \mathcal{C}^{\mathbb{Z}_=} \arrow[l, shift left, "u"] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant}) \arrow[r, shift left, "colim"] \arrow[d, shift left] & Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) \arrow[l, shift left, "const"] \arrow[d, shift left] \\ \mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant} \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & \mathcal{C} \arrow[l, shift left] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

idem pour O_*, O^*

Si $\mathcal{O}$ est non-unitaire $(\mathcal{O}(0) = \mathbb{1})$ et $a < 0$, alors $Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant}) \xrightarrow{a^*} Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche

$$a_*^{alg} : Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) \longrightarrow Alg^{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leqslant})$$

tq $\left\{ a_*^{alg}(F^{\mathcal{O}}(X)) = F^{\mathcal{O}}(a_* X) \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} a_*^{alg}(F^T(X)) \simeq F^{T}(a_* X) \\ a_*^{alg} \text{ préserve les colimites sifted} \end{array} \right.$

Filtr° mult canonique : $(-1)_*^{alg}$

prop $(-1)_*^{alg}(R)$ est descendante

$$\mathrm{gr}\,(-1)_*^{alg}(R) \cong F^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)} (-1)_* Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)} R$$

③ Constructions cellulaires

a) Attachement $\quad \mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$

Pour $g \in \mathcal{G}$, on a $g^* : \mathcal{S}^{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{S}$, $X \mapsto X_g$

$\Rightarrow$ adjoint à gauche $g_* : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$

$D^{g,d} = g_*(D^d)$, $\partial D^{g,d}$, $S^{g,d}$

$D^d \times 1 \in \mathcal{S}$

Soit $X_0 \in \mathrm{Alg}^T(\mathcal{C})$, on note

$$X_1 = X_0 \cup_e^T D^{g,d} = \mathrm{colim} \begin{pmatrix} F^T(\partial D^{g,d}) \xrightarrow{e} X_0 \\ \downarrow \\ F^T(D^{g,d}) \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}^T(\mathcal{C})$$

prop Si $\varphi : T \longrightarrow T'$ est un mφ de monades

on obtient $\varphi_*(X_0 \cup_e^T D^{g,d}) = \varphi_*(X_0) \cup_{\varphi_* e}^{T'} D^{g,d}$

on obtient $\varphi_*(X_0 \cup_e^T D^{g,d}) = \varphi_*(X_0) \cup_{\varphi_* e} D$

Si $p : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, $p_* : \mathcal{S}^{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{S}^{\mathcal{G}'}$

$$\Rightarrow p_*(X_0 \cup_e^T D^{g,d}) = p_* X_0 \cup^{p_* T}_{p_*(e)} D^{p(g),d}$$

si T est une opérade

c) Algèbres CW

$$\partial D^d[d-1] = (d-1)_*(\partial D^d) \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}_\leq}$$

$$D^d[d] = d_* D^d \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}_\leq}$$

$f : R \longrightarrow S \in Alg^{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ est CW-relative si

$$\mathrm{const}(R) = sk_{-1}(f) \to sk_0(f) \longrightarrow sk_1(f) \longrightarrow \cdots$$

- $sk_d(f) = sk_{d-1}(f) \cup_{e_\alpha} \bigcup_\alpha D^{g_\alpha, d}[d]$
- $$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & S \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{colim}\, sk_{-1}(f) \arrow[r] & \mathrm{colim}\, \underbrace{sk(f)}_{= \mathrm{colim}\, sk_d f} \end{tikzcd}$$

Thm $\mathrm{gr}\, sk(f) \cong F^{\mathcal{O}}\left(\bigvee_{d \geq 0} \bigvee_{\alpha} d_*(S^{g_\alpha, d}) \right)$