

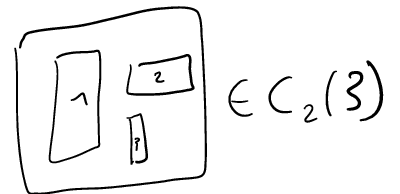
① Opérades E_k et E_k^+

Rappel : $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\text{gr}}$ cat module simpliciale monoidale

Modèle pour $E_k^{(+)}$: opérade des petits cubes $C_k^{(+)}$

$$C_k^+(n) = \text{Emb}^{\text{act}}(\sqcup^{\tilde{n}} I^k, I)$$

$$C_k(n) = \begin{cases} C_k^+(n) & n > 0 \\ \emptyset & n = 0 \end{cases}$$



Composition = composition d. plongements

$$E_k^+(X) = F^{E_k^+}(X) = \bigsqcup_{n \geq 1} C_k^+(n) \times_{\Sigma_n} X^n$$

$\Rightarrow$ monades tamisées

$\varepsilon : E_k \rightarrow +$ augmentation canonique (de monades)

$\Rightarrow Q_{\perp}^{E_k}(\mathbf{R}) = \mathbb{L} \varepsilon_*(\mathbf{R}) \in \mathcal{C}_*$ objet pointé

$\hookrightarrow$ Indécomposables dérivés

Rq On a une composition d'adjonctions $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\cup]{E_k} \text{Alg}_{E_k}(\mathcal{C}) \xrightleftharpoons[\varepsilon_*]{\varepsilon_*} \mathcal{C}_*$ $\rightarrow Q^{E_k}(E_k(X)) = X_+$

$\Rightarrow$ En général, $Q^{E_k}(\mathbf{R}) = \text{coeq}(E_k(\mathbf{R}) \xrightarrow{\quad} \mathbf{R})$

$$\Rightarrow \text{En général, } Q^{E_k}(\mathbf{R}) = \text{coeq} \left(E_k(\mathbf{R}) \begin{matrix} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} \mathbf{R}_+ \right)$$

Si $\mathbf{R}_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$ est une résolution simpliciale libre en chaque dim, alors $Q^{E_k}(\mathbf{R}) \simeq Q^{E_k}|\mathbf{R}_\bullet| \simeq |Q^{E_k}(\mathbf{R}_\bullet)|$

⚠ 1-1 = réalisation dans $\text{Alg}_{E_k}(\mathbb{C})$

② Construction bar itérée $k \in \mathbb{N}$ fixé

Pour $p = (p_1, \dots, p_k)$, on définit

$$P_k(p) = \left\{ (t_i^j)_{\substack{0 \leq i \leq p_j \\ 1 \leq j \leq k}} \mid 0 < t_0^j < \dots < t_{p_j}^j < 1 \right\}$$

en

$\in P_2(1, 2)$

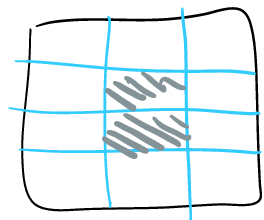
On déf un espace k -semi-simplicial

$$\begin{array}{ccc} (\Delta_{\text{inf}}^{\text{op}})^k & \longrightarrow & \text{Top} \\ p & \longmapsto & P_k(p) \end{array}$$

en

d_0^1

Cubes internes $\rightsquigarrow \delta \in C_k(p_1 \times \dots \times p_k)$



$\in C_2(\mathbb{Z})$ 2 petits cubes

Les faces d_i^j fusionnent les petits cubes consécutifs

$(q_1, \dots, q_{j-1}, i, q_{j+1}, \dots, q_k)$ et

$(q_1, \dots, q_{j-1}, i+1, q_{j+1}, \dots, q_k)$

On note $\delta_i^j \in C_k(\mathbb{Z})$ la configuration donnée par les 2 cubes fusionnés par δ_i^j

$\Rightarrow$ on définit la construction bar :

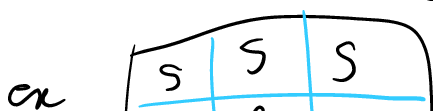
pour $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ m.f. d'algèbre E_k^+ ,

$$B_{\bullet}^{E_k}(f) \in \mathcal{C}^{(\Delta_{inj}^{or})^k}$$

$$B_{p_1, \dots, p_k}^{E_k}(f) = P_k(p) \cdot \times G_p(f)$$

$$\text{où } G_p(f) = \bigotimes_{q_1=0}^{p_1+1} \dots \bigotimes_{q_k=0}^{p_k+1} B_{p_1 \dots p_k}^{q_1 \dots q_k}$$

$$B_{p_1 \dots p_k}^{q_1 \dots q_k} = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } 1 \leq q_i \leq p_i \\ \mathbf{S} & \text{sinon} \end{cases}$$



ex

S	S	S
S	R	S
S	R	S
S	S	S

 $= G_{(1,2)}(f)$

Les fous $d_i^{\varepsilon} : B_{p_1 \dots p_k}^{\varepsilon_k}(f) \longrightarrow B_{p_1 \dots p_{i-1}, \dots, p_k}^{\varepsilon_k}(f)$

on doit définir $P_k(p) \times G_p(f) \longrightarrow P_k(\dots) \times G_{\dots}(f)$

• sur $P_k(\dots)$: comme avant

• sur $G_{\dots}(f)$: par adjonction, donné par

$$P_k(p) \xrightarrow{\quad} \text{Map}_{\varepsilon}(G_{p_1 \dots p_k}(f), G_{p_1 \dots p_{i-1} \dots p_k}(f))$$

$\searrow \delta_i \quad \nearrow \alpha$
 $C_k(2)$

où α est donné par la multiplication et f

ex

S	S	S	S
S	R	R	S
S	S	S	S

 $\xrightarrow{d_0^1}$

S	S	S
S	R	S
S	S	S

$$C_k(2) \xrightarrow{\text{structure}} \text{Map}(S \otimes S, S) \xrightarrow{(\text{id} \otimes f)^*} \text{Map}(S \otimes R, S)$$

On pose $B^{\varepsilon_k}(f) = |B_{\cdot}^{\varepsilon_k}(f)| \in \mathcal{C}$

Si $f = \varepsilon : R \rightarrow 1$, on note
 $B^{E_k}(R, \varepsilon) = B^{E_k}(\varepsilon)$ (pour se rappeler de R)

$$\begin{array}{ccccc} B^{E_k}(1, \varepsilon) & \xrightarrow{\text{unité}} & B^{E_k}(R, \varepsilon) & \xrightarrow{\varepsilon} & B^{E_k}(1, \varepsilon) \\ \simeq 1 & & & & \simeq 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ construction bar réduite

$$\tilde{B}^{E_k}(f) = \text{cofibre}(B^{E_k}(1, \varepsilon) \rightarrow B^{E_k}(R, \varepsilon))$$

Pour $R \in \text{Alg}_{E_k}(\mathcal{C})$, R^+ l'unitisation

$\Rightarrow$ augmentation canonique $R^+ \xrightarrow{\varepsilon} 1$

qui est *scindée*, ie si $\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(R) & \xrightarrow{\quad} & R^+ \\ \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ * & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array}$ alors $\mathcal{I}(R)^+ \cong R^+$

lemme Si R est scindée, alors

(Alors $B^{E_k}(R, \varepsilon) \cong B^{E_k}(1, \varepsilon) \vee \tilde{B}^{E_k}(R, \varepsilon)$)

Description alternative de $\tilde{B}^{E_k}$:

lemme Si $R \in \text{Alg}_{E_k}(\mathcal{C})$ est cofibrante, alors

$$\tilde{B}^{E_k}(R, \varepsilon) \simeq |\tilde{B}_\bullet^{E_k}(R, \varepsilon)|$$

$$\text{où } \tilde{B}_p^{E_k}(R) = \begin{cases} * & \text{si } \exists j \text{ tq } p_j = 0 \\ \frac{P_k(p) \times \bigotimes_q (1 \cup R)}{P_k(r)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Chm

Il existe un zigzag de transfo nat

$$\tilde{B}^{E_k}(-) \Leftarrow \dots \Rightarrow S^k \wedge Q_L^{E_k}(-)$$

(vus comme foncteurs $\text{Alg}(E_k) \rightarrow \mathcal{C}_*$) , qui est une équ sur les objets cofibrants

Réduction au cas libre

On prend $S^k = (\Delta^1 / \partial \Delta^1)^{\wedge k} \in \text{Set}_*^{(\Delta_{\text{ins}}^{\text{op}})^k}$

On pose $Q^{E_k}(\mathbf{R}) = S^k \wedge Q^{E_k}(\mathbf{R})$

Alors $|Q^{E_k}(\mathbf{R})| \cong |S^k| \wedge Q^{E_k}(\mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} S^k \wedge Q^{E_k}(\mathbf{R})$

$\Rightarrow$ on construit

$$\nu_{\mathbf{R}} : \tilde{B}^{E_k}(\mathbf{R}) \longrightarrow Q^{E_k}(\mathbf{R})$$

induit par :

- $P_k(p) \longrightarrow *$
- $\mathbf{R} \longrightarrow Q^{E_k}(\mathbf{R})$ en degré $(1, \dots, 1)$
- $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{t}$ sur les autres degrés

affirmation Si $X \in \mathcal{C}$ est cofibrant, alors $v_{E_k(X)}$ est une équivalence

Supposons l'affirmation et prouvons le thm

Prenons $R. \xrightarrow{f} R$ une résolution simpliciale libre

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{B}^{E_k}(R) & & \\
 \uparrow \sim & & \\
 \tilde{B}(R.) & \xrightarrow{\sim_{R.}|_{E_k}} & S^k \wedge Q^{E_k}(R.) = S^k \wedge Q_{\mathbb{L}}^{E_k}(R) \\
 \parallel & & \parallel \\
 | \tilde{B}(R.) |_{E_k} & \xrightarrow[\sim_{R.}|_{E_k}]{\text{affirm}} & | S^k \wedge Q^{E_k}(R.) |
 \end{array}$$

Thm Il existe un zigzag de transfo nat

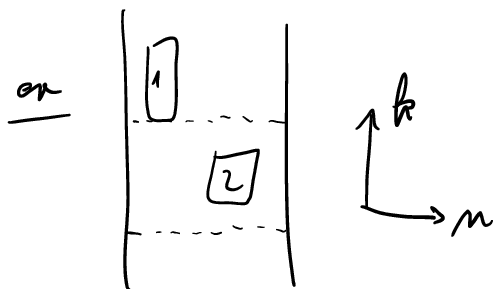
$\tilde{B}^{E_k}(E_{n+k}(-)) \Leftarrow \dots \Rightarrow E_n(S^k \wedge (-)_+)$
 de foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_*$, qui sont des équiv faibles
 sur les cofibrants

Rq Pour le thm principal, juste besoin de $n=0$
 La

+ donc on a une propriété, pour $n=0$
 Le cas $n > 0$ sera utile plus tard.

On déf. une suite sym.

$$F_{n,k}(i) = \begin{cases} \emptyset & i=0 \\ \text{Emb}^{\text{rect}}(\sqcup^i \mathbb{I}^n \times \mathbb{I}^k, \mathbb{I}^n \times \mathbb{R}^k) \end{cases}$$



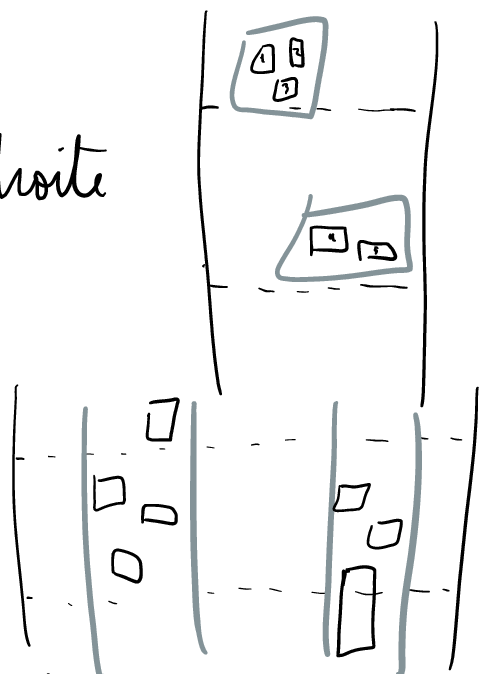
$\partial F_{n,k}(i) = \text{config dont au moins un des cubes}$
 sort entièrement de $\mathbb{I}^{n+k}$

On considère aussi $F_{n,k} / \partial F_{n,k}$ (arête par arête)

Ce sont :

• des E_{n+k} - modules à droite

• des E_n - modules à gauche



En particulier, (E_n, E_n) - bimodules.

On note $\overline{F}_{m,k} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$

$$X \longmapsto \bigsqcup_{i \geq 1} F_{m,k}(i) / \partial F_{m,k}(i) \times_{\sum_i} X^{\times i}$$

$A \rtimes X = A \rtimes X_{\#}$

$\Rightarrow$ se relève en un foncteur $\overline{F}_{m,k} : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Alg}_{E_m}(\mathcal{C}_{\#})$

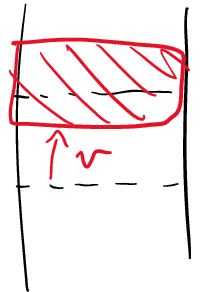
preuve du thm (modulo lemmes)

$$E_m(S^k \rtimes X) \xleftarrow{\textcircled{1}} \overline{F}_{m,k}(X) \xleftarrow{\textcircled{2}} |\overline{F}_{m,k,\bullet}(X)| \xrightarrow{\textcircled{3}} |\overline{F}_{m,k}^0(X)| \xleftarrow{\textcircled{4}} \widetilde{B}^{E_*}(E_{m+k})$$

lemme 1 On pose $\varphi : \mathbb{R}^k \longrightarrow F_{m,k}(1)$

$$v \longmapsto \pm^{m,k} + v$$

$$\varphi(\partial \mathbb{R}^k) \subset \partial F_{m,k}(1) \text{ où } \partial \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \setminus (-1,1)^k$$



$$\rightsquigarrow \varphi : \mathbb{R}^k / \partial \mathbb{R}^k = S^k \longrightarrow \overline{F}_{m,k}(1)$$

$$\rightsquigarrow S^k \rtimes X \longrightarrow \overline{F}_{m,k}(1) \rtimes X \hookrightarrow \overline{F}_{m,k}(X)$$

$\rightsquigarrow$ morphisme de E_m -algèbres

$$E_m(S^k \rtimes X) \longrightarrow \overline{F}_{m,k}(X)$$

donnée par :

$$\varphi_i : C_m(i) \wedge (S^k)^i \longrightarrow \overline{F}_{m,k}(i)$$

$$(e_1, \dots, e_i, v_1, \dots, v_i) \longmapsto \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \boxed{e_1} \\ \uparrow +v_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{e_2} \\ \downarrow +v_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{e_3} \\ \uparrow +v_3 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$(m, r) \longmapsto (1, 1, 1, \dots, 1, r, \dots, r)$$

$\mathcal{Q}_i$ est une éqr faible (déform. rétract explicite)

Lemme 2 $F_{n,k,p}(X) \subset P_k(P) \times F_{n,k}(i)$
 $= \{(t_i^j), e \mid \text{la grille ne touche pas les cubes}\}$

$\Rightarrow$ Résolution simpliciale de $F_{n,k}(i)$

(regarder les centres: $\text{Conf}_{k,n,\bullet}(i) \rightarrow \text{Conf}_{k,n}(i)$)

c'est une « microfibration de Serre » à fibres contractiles, cofD
 (et ça marche aussi pour $\partial F_{n,k}$ et $\overline{F}_{n,k}$)

Lemme 3 $\partial^\circ F_{n,k}^{(X)} = \{(t_i^j), e \mid \text{au moins un des cubes est à l'extérieur de } \mathbb{I}^n \times [t_0^1, t_{p_1}^1] \times \dots \times [t_0^k, t_{p_k}^k]\}$

Facile de voir que $\partial F_{n,k}(X) \hookrightarrow \partial^\circ F_{n,k}(X)$

$\Rightarrow$ induit $\overline{F}_{n,k,\bullet}^0(X) = F_{n,k,\bullet}(X) / \partial^\circ F_{n,k,\bullet}(X) \xrightarrow{\sim} \overline{F}_{n,k,\bullet}(X)$

Lemme 4 Iso explicite $\widetilde{B}_{\bullet}^{E_k}(E_{n+k}(X)) \cong \overline{F}_{n,k,\bullet}^0(X)$