

① Modules sur les algèbres E_1

Étant donnée R une algèbre E_1 , on la remplace par une algèbre associative unitaire \bar{R} tq $\text{Mod}_R = \text{Mod}_{\bar{R}}$

$$\bar{R} := ([0, \infty) \times \mathbb{1}) \sqcup ((0, \infty) \times R) \quad \text{dans } \mathcal{C} = \mathcal{J}^{\mathcal{G}}$$

avec la structure d'algèbre associative unitaire suivante :

- $[0, \infty) \times \mathbb{1}$ est une algèbre assoc unitaire :

$$([0, \infty) \times \mathbb{1}) \otimes ([0, \infty) \times \mathbb{1}) \cong [0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \subseteq \mathbb{1}]{\text{addition}} [0, \infty) \times \mathbb{1}$$

- $(0, \infty) \times R$ est un $[0, \infty) \times \mathbb{1}$ -bimodule

$$[0, \infty) \times \mathbb{1} \otimes (0, \infty) \times R \subseteq [0, \infty) \times (0, \infty) \times (\mathbb{1} \otimes R) \xrightarrow[\mathbb{1} \otimes R \subseteq R]{\text{addition}} (0, \infty) \times R$$

pareil dans l'autre sens

- $(0, \infty) \times R$ est une algèbre assoc (non unit)

$$(0, \infty) \times R \otimes (0, \infty) \times R \cong (0, \infty) \times (0, \infty) \times R \otimes R$$

$$\longrightarrow (0, \infty) \times R$$

$$(s, t, x \otimes y) \longmapsto (s+t, \alpha_{s,t}(x, y))$$

$$\text{où } \alpha_{s,t} \in \mathcal{E}_1^{\text{FB}_1}(2), \quad \alpha_{s,t} = \left(\mu \mapsto \frac{s\mu}{s+t}, \quad \mu \mapsto \frac{s+t\mu}{s+t} \right)$$

C'est ça est fonctiel :

$$\overline{(-)} : \text{Alg}_{E_1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Alg}_{\text{ass}}(\mathcal{C})$$

lemme i) \bar{R} est cofibrante $\Leftrightarrow R$ est cofibrante dans \mathcal{C}
 ii) $-$ préserve les éqrs faibles entre cofibrants

lemme Si $R \in \text{Alg}_{\text{Ass}}(\mathcal{C}) \hookrightarrow U(R) \in \text{Alg}_{E_1^+}(\mathcal{C})$
 alors $\overline{U(R)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1} \vee R \cdot R^+$ unitalisation

prop On a un zigzag de transfo mat de foncteurs $\text{Alg}_{E_1} \rightarrow \text{Alg}_{E_1^+}$
 $\overline{(-)} \leftarrow \dots \longrightarrow (-)^+$ éqrs sur les cof
 on compose = avec $U: \text{Alg}_{\text{Ass}^+} \rightarrow \text{Alg}_{E_1^+}$

pr Rappel : construction bar monadique $B.(D, T, G) = D \circ T^{\circ} \circ G$

si $D = F^T: \mathcal{C} \rightarrow \text{Alg}_T(\mathcal{C})$ et $U: \text{Alg}_T(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$

alors $B.(F^T, T, U)$ est augmenté avec $B_{-1} = \text{id}$

\Rightarrow pour $X \in \text{Alg}_T$, on trouve

$B.(F^T, T, X) \longrightarrow X$ résolution simpliciale

Dans notre cas, on obtient

$B.(F^{E_1}, E_1, R) \longrightarrow R$

Soit $\varphi: E_1 \rightarrow \text{Ass} \rightsquigarrow \varphi_*: \text{Alg}_{E_1}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \text{Alg}_{\text{Ass}}(\mathcal{C}), \varphi^*$

F^{Ass} est un E_1 -module à droite :

$F^{E_1} \longrightarrow \varphi^* \varphi_* F^{E_1} = \varphi^* F^{\text{Ass}}$

$\rightsquigarrow B.(F^{E_1}, E_1, R) \longrightarrow \varphi^* B.(F^{\text{Ass}}, E_1, R)$

$\rightsquigarrow \dots \rightarrow R^+ \xrightarrow{\sim} \frac{R \text{ (Ass) } \sqsubset \text{DT}}$

$$\rightsquigarrow D. (\dots , E_1, R) \xrightarrow{\sim} D. (\dots , E_1, R)$$

$$\rightsquigarrow B(F^{E_1}, E_1, R)^+ \xleftarrow[\text{lemme}]{\sim} B(F^{A_0}, E_1, R)$$

Don compléte le zigzag

$B.(\dots)$ est Reedy Cof et $E_1 \xrightarrow{\sim} A_0$
(si R est cof) □

Si \mathcal{C} est pointé, on a $R \rightarrow *$

$$\Rightarrow \bar{R} \xrightarrow{\epsilon} \uparrow \sqcup * \cong \uparrow \text{ augmentation canonique}$$

$\hookrightarrow * = \text{initial} = \text{final}$

$$\Rightarrow \text{foncteurs } Q^R : \text{Alg}_{\bar{R} \otimes -}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

$= \text{Mod}_{\bar{R}}(\mathcal{C})$

$$\text{et } Q^{\bar{R}} : \text{Alg}_{- \otimes \bar{R}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

$= {}_{\bar{R}}\text{Mod}(\mathcal{C})$

2 versions dérivées

Adaptateurs

Si \mathcal{C} est tressée ou symétrique, alors $\bar{R} \otimes \bar{R}$

a une structure d'algèbre associative unitaire aussi

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = \uparrow \otimes \bar{R} \xrightarrow{\lambda} \bar{R} \otimes \bar{R} \\ \bar{R} = \bar{R} \otimes \uparrow \xrightarrow{\epsilon} \bar{R} \otimes \bar{R} \end{array} \right\} \text{deux structures } \neq \text{ de } \bar{R}\text{-mod}$$

Un adaptateur pour R est un $(\bar{R} \otimes \bar{R}, \bar{R})$ -bimodule $A(R)$, muni de $A(R) \xleftarrow{\sim} \bar{R} \xrightarrow{\sim} A(R)$ comme (\bar{R}, \bar{R}) -bimod

$A(R)$, muni de $A(R) \leftarrow \rightarrow R$ comme (\bar{R}, R) -bimod
 (où on utilise λ pour voir $A(\bar{R})$ comme (\bar{R}, \bar{R}) -bimodale)

$$\begin{array}{ccc} \text{Cq } (\bar{R} \otimes D) \otimes A(R) & \searrow & A(R) \\ \downarrow \cong & & \\ (D \otimes \bar{R}) \otimes A(R) & \nearrow & \end{array} \quad \text{commute à droite près}$$

$R_q \exists \text{Alg}_{E_2}(\mathcal{C}) \longrightarrow (\bar{R} \otimes \bar{R}, \bar{R})$ -bimod fonctionnel

Appl^o : Attachement de cellules

R : algèbre E_1 , M : \bar{R} -module à gauche

$$f : \partial D^{g, d+1} \longrightarrow \bar{R}$$

$$\Rightarrow f \cdot - : \partial D^{g, d+1} \otimes M \xrightarrow{f \otimes \text{id}} \bar{R} \otimes M \xrightarrow{\alpha} M$$

on définit $\partial D^{g, d+1} \otimes M \xrightarrow{f \otimes \text{id}} M$

Δ pas un morphisme de \bar{R} -module à gauche

$\Rightarrow M/f$ n'est pas un \bar{R} -module à gauche

$$\begin{array}{ccc} \partial D^{g, d+1} \otimes M & \xrightarrow{f \otimes \text{id}} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{g, d+1} \otimes M & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & M/f \in \mathcal{C} \\ \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\ \text{mauvaise def} & & \end{array}$$

def $Q(f) : \partial D^{g, d+1} \otimes A(R) \xrightarrow{f \otimes \text{id}} \bar{R} \otimes A(R) \xrightarrow{\alpha \otimes \text{id}} \bar{R} \otimes \bar{R} \otimes A(R) \rightarrow A(R)$

$$\partial D^{g, d+1} \otimes A(R) \longrightarrow A(R)$$

$$\begin{array}{ccc} \partial D^{g, d+1} \otimes A(R) & \xrightarrow{\quad} & A(R) \\ \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\ D^{g, d+1} \otimes A(R) & \xrightarrow{\quad} & \bar{R}/f \end{array}$$

Cette fois-ci c'est bon :
 en utilisant \mathcal{C} , ça reste
 un \bar{R} -module à gauche
 (et un module à droite)

$$D^* \otimes M(\mathbb{N}) \dashrightarrow \bar{R}/f \quad (\text{et un module à droite})$$

$$M/f = (\bar{R}/f) \otimes_{\bar{R}} M \Rightarrow \bar{R}\text{-module à gauche}$$

$U^{\bar{R}}(M/f)$ est \simeq_c à la mauvaise déf

② Algèbres E_k à partir de groupoïde monoidal

\mathcal{G} : groupoïde k -monoidal

muni d'un foncteur monoidal $r: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$ «rang»

On suppose que $r^{-1}(0)$ est le sous-gpd des objets $\simeq \mathbb{1}$

Hypothèse $G_0 = \text{Aut}_{\mathcal{G}}(\mathbb{1})$ est trivial

Rappel : $s\text{Set}^{\mathcal{G}}$ est muni du pdt de résolution de Day

$\underline{*} \in s\text{Set}^{\mathcal{G}}$, $\underline{*}(x) = *$ est terminal

\Rightarrow c'est une 0-algèbre pour toute opérade simpliciale

(p.ex. E_k^+).

Grâce à l'hypothèse, $\underline{*}$ est l'unitatisation de $\underline{*}_{>0}$

où $\underline{*}_{>0}(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \leq \mathbb{1} \\ * & \text{sinon} \end{cases}$ est une algèbre E_k

Soit $T \xrightarrow{\sim} \underline{*}_{>0}$ une résolution cofibrante dans Alg_{E_k}

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{Y} & \xrightarrow{T} & s\text{Set} \\
 \downarrow \rho & \nearrow & \\
 \mathbb{N} & &
 \end{array}
 \quad \rho_* T = \coprod_{\rho_*^{-1}(*)_{>0}} \rho_*^{-1}(*)_{>0} =: \mathbf{R} \Rightarrow \text{algèbre } E_k \text{ dans } s\text{Set}^{\mathbb{N}}$$

$$\underline{R} \text{ q } \mathbf{R}(n) \simeq \begin{cases} \emptyset & \text{si } n=0 \\ \bigsqcup_{\substack{[z] \in \pi_0 \mathcal{Y} \\ \rho(z)=n}} \mathcal{B} \mathcal{Y}_z & \text{sin } \mathcal{Y}_z = \text{Aut}_{\mathcal{Y}}(z) \end{cases}$$

Hypothèse $\forall x, y \in \mathcal{Y}, \mathcal{Y}_x \times \mathcal{Y}_y \rightarrow \mathcal{Y}_{x \otimes y}$ est inj

Pour $x \in \mathcal{Y}$, on définit

$$T^{\bullet E_1}(x) : \Delta_{\text{inj}}^{\text{op}} \rightarrow s\text{Set}_* \\
 [p] \mapsto \left(\text{colim}_{x_1, \dots, x_p \in \mathcal{Y}_{>0}} \mathcal{Y}_{(x_1 \otimes \dots \otimes x_p, x)} \right)_+$$

d_0 et d_p envoient tout sur le point base

et d_i concatène x_i, x_{i+1}

Et $T^{E_1}(x) = \| T^{\bullet E_1}(x) \| \in s\text{Set}_*$ réalisation géom épaisse

lemme $S^1 \wedge Q_{\coprod}^{E_1} \left(\frac{*}{>0} \right) (x) \simeq T^{E_1}(x)$

\mathcal{Y}_x - équivariant dans $s\text{Set}_*$

$$R \dots \cap S^1 \cap E_1(\dots) \simeq \tilde{R}^{E_1}(\dots) \text{ const. base}$$

Rappel: $S^1 \wedge Q^{E_1}(\dots) \simeq \tilde{B}^{E_1}(\dots)_+$ conste. base

Cor $S^1 \wedge Q_{\mathbb{L}}^{E_1}(\mathbb{R})(m) \simeq \bigvee_{\substack{[x] \in \pi_0 \mathcal{Y} \\ \nu(x)=m}} T^{E_1}(x) \wedge_{\mathcal{Y}_x} (E\mathcal{Y}_x)_+$

On dit que \mathcal{Y} satisfait l'estimation standard de connectivité si $H_*(T^{E_1}(x))$ est concentré en degré $\nu(x)$

On définit dans ce cas $st^{E_1}(x) \simeq \tilde{H}_{\nu(x)}(T^{E_1}(x); \mathbb{Z})$

Dans ce cas:

$$H_{m,d}^{E_1}(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{\substack{[x] \in \pi_0 \mathcal{Y} \\ \nu(x)=m}} H_{d-(m-1)}(\mathcal{Y}_x; st^{E_1}(x))$$

(En particulier $H_{m,d}^{E_1} = 0$ si $d < m-1$)

Manière encore plus simple de calculer H^{E_1} :

$$S_{\bullet}^{E_1}(x): \Delta_{inj}^{op} \longrightarrow sSet$$

$$[p] \longmapsto \operatorname{colim}_{(x_0, \dots, x_{p+1}) \in \mathcal{Y}_{>0}^{p+1}} \mathcal{Y}(x_0 \otimes \dots \otimes x_{p+1}, x)$$

$$\text{et } S^{E_1}(x) = \| S_{\bullet}^{E_1}(x) \| \in sSet$$

lemme $T^{E_1}(x) \simeq \Sigma^2 S^{E_1}(x)$ (suspension non réduite)
 ex $\Sigma \emptyset = S^0$

Rq Si \mathcal{G} n'a qu'une classe d'iso en chaque rang, alors

$$S_p^{E_1}(x) \cong \bigsqcup_{\substack{(x_0, \dots, x_{p+1}) \in \mathcal{G}_{>0} \\ x_0 \oplus \dots \oplus x_{p+1} = x}} \mathcal{G}_x / \mathcal{G}_{x_0} + \dots + \mathcal{G}_{x_{p+1}}$$

ex Si $\mathcal{G} = (\mathbb{N}, \oplus, 0)$

Alors $R \cong \mathbb{N}_{>0}$

$$\text{via } S_p^{E_1}(n) = \{ (m_0, \dots, m_{p+1}) \mid m_0 + \dots + m_{p+1} = n \}$$

$$S_p^{E_1}(n) \cong \begin{cases} \emptyset & \text{si } n=1 \\ * & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{car objet terminal} \\ 1+1+\dots+1=n \end{array}$$

$$\Rightarrow H_{m,d}^{E_1}(\mathbb{N}_{>0}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } (m,d) = (1,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$