Applications

Groupe de travail sur la stabilité homologique

Najib Idrissi

13 juin 2019

0 Dans les épisodes précédents...

$(\mathsf{G}, \otimes, \mathbb{1})$: groupoïde monoïdal symétrique qui vérifie :

- $\exists$ foncteur monoïdal $r : \mathsf{G} \to \mathbb{N}$ t.q. $r^{-1}(0) = \{x \in \mathsf{G} \mid x \cong \mathbb{1}\}$;
- $\mathsf{G}_{\mathbb{1}} = \mathrm{End}_{\mathsf{G}}(\mathbb{1})$ est trivial ;
- $\mathsf{G}_x \times \mathsf{G}_y \to \mathsf{G}_{x \otimes y}$ est injectif pour tous $x, y \in \mathsf{G}$.

On a S : catégorie des espaces, $\mathsf{C} = \mathsf{S}^{\mathsf{G}}$: catégorie des diagrammes.

On définit une algèbre E_k :

$$\mathbf{R} \coloneqq \mathbb{L}r_*(\underline{*}_{>0}) \in \mathsf{Alg}_{E_k}(\mathsf{sSet}^{\mathbb{N}})$$

Concrètement, $\mathbf{R}(n) = \bigsqcup_{[x] \in \pi_0(r^{-1}(n))} B\mathsf{G}_x$ et $\mathbf{R}(0) = \varnothing$.

On définit le complexe de scindage (simplifié) $S^{E_1}_{\bullet}(x)$:

$$S^{E_1}_p(x) \coloneqq \mathrm{colim}_{x_0, \dots, x_{p+1} \in \mathsf{G}^{p+2}_{>0}} \mathsf{G}(x_0 \otimes \dots \otimes x_{p+2}, x).$$

On dit que G vérifie l'hypothèse de connectivité standard si :

$$\forall i \neq r(x),\ \tilde{H}_i(\Sigma^2 S^{E_1}_{\bullet}(x)) = 0. \tag{HCS}$$

Dans ce cas, $H^{E_1}_{n,d}(\mathbf{R}; \mathbb{Z}) = 0$ pour $d < n - 1$.

1 Théorème principal

Théorème 1. *Soit G un groupoïde vérifiant les hypothèses précédentes. Supposons également qu'il existe un unique objet σ vérifiant $r(\sigma) = 1$ (à isomorphisme près). Alors à isomorphisme près, les objets de G sont les puissances de σ et $H_d(G_{\sigma^n}, G_{\sigma^{n-1}}; \mathbb{Z}) = 0$ pour $2d \leq n - 1$.*

De plus, si $\Bbbk$ est un anneau commutatif tel que $H_1(G_\sigma; \Bbbk) \xrightarrow{\sigma \cdot -} H_1(G_{\sigma^2}; \Bbbk)$ est surjectif, alors on a même $H_d(G_{\sigma^n}, G_{\sigma^{n-1}}; \Bbbk) = 0$ pour $3d \leq 2n - 1$.

Soit $\mathbf{R}_{\Bbbk} \in \mathsf{Alg}_{E_k}(\mathsf{sMod}^{\mathbb{N}}_{\Bbbk})$ l'algèbre obtenue en linéarisant $\mathbf{R}$. On peut strictifier $\mathbf{R}_{\Bbbk}$ et obtenir une algèbre associative unitaire $\overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk}$, faiblement équivalent à $\mathbf{R}^+_{\Bbbk}$ comme algèbre E^+_1. De plus, on peut appliquer la construction des adaptateurs à $\mathbf{R}_{\Bbbk}$ et à $\sigma \in H_0(\mathsf{G}_1; \Bbbk) = \pi_{1,0}(\overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk})$ pour obtenir le $\overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk}$-module à gauche

$$\overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk}/\sigma \simeq \mathrm{cofibre}\big(S^{1,0} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk} \xrightarrow{\sigma \otimes 1} \overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk} \otimes \overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk} \xrightarrow{\mu} \overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk}\big).$$

En particulier, $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk}/\sigma) \cong H_d(G_{\sigma^n}, G_{\sigma^{n-1}}; \Bbbk)$.

Théorème 2. *Soit* $\mathbf{R} \in \mathsf{Alg}_{E_k}(\mathsf{sMod}_{\Bbbk}^{\mathbb{N}})$ *une algèbre* E_k *non-unitaire avec* $k \geq 2$*. Supposons que* $H_{*,0}(\mathbf{R}) = \Bbbk[\sigma]$ *avec* $\deg \sigma = (1\,,0)$*. Si* $H_{n,d}^{E_k}(\mathbf{R}) = 0$ *for* $d < n-1$ *alors* $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma) = 0$ *pour* $2d \leq n-1$*. Si de plus* $H_{1,1}(\mathbf{R}) \xrightarrow{\sigma\cdot-} H_{2,1}(\mathbf{R})$ *est surjective, alors* $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma) = 0$ *pour* $3d \leq 2n-1$ *et* $H_{2,1}^{E_k}(\mathbf{R}) = 0$*.*

Preuve du Théorème 1. Commençons par montrer que les objets de G sont les puissances de σ à isomorphisme près. Les puissances de σ sont bien distinctes car $r(\sigma^n) = n$. Supposons que le résultat est faux. Soit $x \in \mathsf{G}$ de rang minimal $r(x) \geq 2$ tel que x n'est pas une puissance de σ. Alors on voit que $S_{\bullet}^{E_1}(x)$ est vide : on ne peut pas écrire x comme un produit de termes de rangs inférieurs, car ce sont tous des puissances de σ. Donc $\Sigma^2 S^{E_1}(x) \simeq S^1$ dont l'homologie n'est pas concentrée en degré $r(x) \geq 2$. Cela contredit l'hypothèse de connectivité standard.

Reste à montrer que l'on peut appliquer le Théorème 2. L'hypothèse de connectivité standard nous dit que $H_{n,d}^{E_1}(\mathbf{R}\,;\mathbb{Z}) = 0$ pour $d < n-1$. On peut transférer cette ligne d'annulation vers le haut et en déduire que $H_{n,d}^{E_2}(\mathbf{R}\,;\mathbb{Z}) = 0$ pour $d < n-1$. On vient par ailleurs de démontrer que $H_{*,0}(\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{+}) = \mathbb{Z}[\sigma]$. On peut donc conclure. □

Preuve du Théorème 2. On va se ramener progressivent à des cas de plus en plus simples. En fin de compte, on se ramènera au calcul de l'homologie d'une algèbre E_k libre de Cohen.

Étape 1. *On peut se ramener au cas* $\mathbf{R} = E_k(\mathbf{X})$ *où* $\mathbf{X}$ *est une somme (wedge) finie de sphères, une seule en bidegré* $(1\,,0)$ *et les autres en bidegré* $(n\,,d)$ *avec* $d \geq n-1$*.*

On peut appliquer le théorème sur les approximations CW et trouver $\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$ où $\mathbf{Z}$ est une algèbre E_k CW qui a une unique cellule en bidegré $(1\,,0)$ et dont toutes les autres cellules sont en bidegré $(n\,,d)$ avec $d \geq n-1$. On considère sa filtration squelettique $\operatorname{sk}\mathbf{Z} \in \mathsf{Alg}_{E_k}\big((\mathsf{sMod}_{\Bbbk}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}_{\leq}}\big)$. On la strictifie en l'algèbre associative unitaire $\overline{\operatorname{sk}\mathbf{Z}}$ dans $(\mathsf{sMod}_{\Bbbk}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}_{\leq}}$, et on utilise les adaptateurs pour construire le module à gauche $\overline{\operatorname{sk}\mathbf{Z}}/\sigma$. On en déduit l'existence d'une suite spectrale :

$$E_{n,p,q}^{1} = H_{n,p+q,q}(\operatorname{gr}(\overline{\operatorname{sk}\mathbf{Z}}/\sigma)) \implies H_{n,p+q}(\overline{\mathbf{Z}}/\sigma) \cong H_{n,p+q}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma).$$

Comme gr commute avec les colimites, il commute avec la strictification et les quotients, c.-à-d. $\operatorname{gr}(\overline{\operatorname{sk}\mathbf{Z}}/\sigma) \cong \overline{\operatorname{gr}(\operatorname{sk}\mathbf{Z})}/\sigma$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour $\mathbf{X} \coloneqq \operatorname{gr}\operatorname{sk}\mathbf{Z}$. Or on a vu dans l'exposé sur les squelettes que $\operatorname{gr}\operatorname{sk}\mathbf{Z}$ est une algèbre E_k libre sur un wedge de sphères comme indiqué ci-dessus. Si jamais il y a un nombre infini de sphères, alors on dit que c'est la colimite de la somme wedge sur les sous-ensembles finis de sphères et tout commute.

Étape 2. *Il suffit de considérer le cas* $\Bbbk = \mathbb{Z}$*.*

Le changement d'anneau de base commute avec les colimites et avec la structure monoïdale. Par le théorème des coefficients universels, on a une suite exacte :

$$0 \to H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{Z}}/\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk \to H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\Bbbk}/\sigma) \to \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n,d-1}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{Z}}/\sigma), \Bbbk) \to 0.$$

Si on a montré le théorème sur $\mathbb{Z}$, les deux termes des extrémités s'annulent ($d < n-1 \implies d-1 < n-1$) donc celui du milieu aussi.

Étape 3. *Il suffit de considérer les cas* $\Bbbk = \mathbb{F}_\ell$ *pour tous les nombres premiers* ℓ*.*

Rebelote :

$$0 \to H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{Z}}/\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_\ell \to H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{F}_\ell}/\sigma) \to \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n,d-1}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{Z}}/\sigma), \mathbb{F}_\ell) \to 0.$$

Comme $\mathbf{R}$ est une algèbre E_k libre sur un nombre fini de sphères (avec la condition sur les bidegrés), alors tous les $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma)$ sont des $\mathbb{Z}$-modules de type fini. Si $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{F}_\ell}/\sigma) = 0$, alors $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{Z}}/\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_\ell = 0$ et le Tor aussi. Donc la ℓ-torsion est nulle et la partie libre est nulle. Si c'est vrai pour tous les nombres premiers, alors c'est que $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbb{Z}}/\sigma) = 0$.

Étape 4. *Preuve de la première partie du théorème : $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma) = 0$ pour $2d \leq n-1$.*

On se place donc dans le cas suivant : $\Bbbk = \mathbb{F}_\ell$ et $\mathbf{R} = E_k(\mathbf{X})$ avec $\mathbf{X} = S^{1,0}\sigma \oplus \bigoplus_\alpha S^{n_\alpha,d_\alpha} x_\alpha$ où $d_\alpha \geq n_\alpha - 1$. On a calculé l'homologie de $\mathbf{R}$ dans ce cas : $H_{*,*}(\mathbf{R}^+) = W_{k-1}(H_{*,*}(X))$ est l'algèbre graduée commutative libre engendrée par les $Q^I_\ell(y)$, où y est un mot de Lie libre en σ et les x_α, et Q^I est une opération de Dyer–Lashof admissible. De même, $H_{*,*}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma)$ est le $H_{*,*}(\mathbf{R}^+)$-module à gauche donné de la façon suivante : c'est l'algèbre graduée commutative libre engendré par les mêmes mots mais sans σ.

On appelle d/n la « pente » d'un élément homogène de bidegré $(n\,,d)$. Les opérations de Dyer–Lashof βQ^s_ℓ et Q^s_ℓ augmentent la pente d'un élément, et la pente d'un crochet de Lie est supérieure à la plus petite pente des deux éléments :

$$[-,-] : H_{n,d} \otimes H_{n',d'} \to H_{n+n',d+d'+k-1},$$
$$Q^s_\ell : H_{n,d} \to H_{pn,d+2s(\ell-1)}, \qquad \beta Q^s_\ell : H_{n,d} \to H_{pn,d+2s(\ell-1)-1}\ (\ell \neq 2),$$
$$\xi_\ell : H_{n,d} \to H_{np,d\ell+(k-1)(\ell-1)}, \qquad \zeta_\ell : H_{n,d} \to H_{\ell n,\ell d+(k-1)(\ell-1)-1}\ (\ell \neq 2)$$

(Pour Q^s et βQ^s, besoin de $2s - d < k-1$ (resp. $s - d < k-1$ si $\ell = 2$) ; pour ξ et ζ, besoin de $d+k-1$ pair ; de plus $Q^s = \beta Q^s = 0$ si $2s \leq d$ (resp. $s < d$)).

Les pentes minimales possibles sont obtenues pour $\beta Q^1_\ell(\sigma)$ (ou $Q^2_2(\sigma)$ si $\ell = 2$) et pour x_α avec $d_\alpha = n_\alpha - 1$, $n_\alpha \geq 2$. Ces pentes sont respectivement $\frac{2(\ell-1)}{\ell}$ (ou $\frac{1}{2}$ si $\ell = 2$) et $\frac{n_\alpha - 1}{n_\alpha}$ qui sont dans tous les cas $\geq \frac{1}{2}$. En particulier, $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma) = 0$ pour $2d < n$.

Étape 5. *Esquisse de preuve de la deuxième partie du théorème : si $H_{1,1}(\mathbf{R}) \to H_{2,1}(\mathbf{R})$ est surjective, alors $H_{n,d}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma) = 0$ pour $3d \leq 2n-1$.*

On relève σ sur $\mathbb{Z}$ puis on tensorise par $\Bbbk$ pour obtenir $Q^1_\Bbbk(\sigma) : S^{2,1}_\Bbbk \to \mathbf{R}$ à partir de $\sigma : S^{1,1}_\Bbbk \to \mathbf{R}$.

Par surjectivité, il existe $x_0 \in H_{1,1}(\mathbf{R})$ t.q. $Q^1_\Bbbk(\sigma) = \sigma x_0$. On complète en une famille génératrice $\{x_\alpha\}$ de $H_{1,1}(\mathbf{R})$. Cela donne un morphisme d'algèbres E_k :

$$\mathbf{Z}_0 \coloneqq E_k\big(S^{1,0}_\Bbbk \sigma \oplus \bigoplus_\alpha S^{1,1}_\Bbbk x_\alpha\big) \cup^{E_k}_{Q^1_\Bbbk(\sigma) - \sigma x_0} D^{2,2}_\Bbbk \rho \to \mathbf{R}.$$

On vérifie en utilisant la suite exacte longue en homologie E_k que $H^{E_k}_{2,1}(\mathbf{R}\,,\mathbf{Z}_0) = H^{E_k}_{2,1}(\mathbf{R}) = 0$.

On trouve une approximation CW relative $\mathbf{Z}_0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$ qui n'a pas de cellule en bidegré $(2\,,1)$. En filtrant par rapport au squelette et en utilisant les mêmes arguments que précédemment, il suffit de montrer que l'homologie de $\mathbf{R}' = (\mathbf{Z}_0 \vee^{E_k} E_k(\mathbf{X}))$ s'annule sur $\mathbb{F}_\ell$ dans les degrés que l'on veut, où $\mathbf{X}$ est un bouquet de sphères $S^{n,d}_{\mathbb{F}_\ell}$ vérifiant $d \geq n-1$, $d > 0$ et $(n\,,d) \neq (2\,,1)$.

On filtre $\mathbf{Z}_0$ (et donc $\mathbf{R}$) par rapport à la cellule ρ. On trouve une suite spectrale avec $d^1(\rho) = Q^1_{\mathbb{F}_\ell}(\sigma) - \sigma x \pmod{\sigma}$. En filtrant encore une fois et en raisonnant bien sur les pentes, on trouve qu'il n'y a rien en pente $< 2/3$. $\square$

2 Exemples d'applications

2.1 Groupes linéaires généraux d'anneaux de Dedekind

Soit Λ un anneau de Dedekind (intègre, noethérien, intégralement clos, tous ses idéaux premiers sont maximaux). (Exemples : anneau des entiers d'un corps de nombres, anneau des entiers d'une extension finie séparable du corps des fractions d'un anneau de Dedekind, anneau de coordonnées d'une courbe algébrique affine non-singulière géométriquement intègre…)

Définition 3. Soit $(P_\Lambda\,, \oplus\,, 0)$ la catégorie monoïdale symétrique des Λ-modules projectifs de type fini. Le rang définit un foncteur monoïdal symétrique $r : P_\Lambda \to \mathbb{N}$.

On en déduit l'existence de $\mathbf{R} \in \mathsf{Alg}_{E_\infty}(\mathsf{sSet}^{\mathbb{N}})$ vérifiant :

$$H_{n,d}(\mathbf{R};\Bbbk) \cong \bigoplus_{[P]\in\pi_0(r^{-1}(n))} H_d(GL(P);\Bbbk).$$

Le complexe de scindage $S^{E_1}(P)$ est isomorphe à « l'ensemble partiellement ordonné de Tits scindé » $S_\Lambda(P)$. Charney montre que ce dernier a le type d'homotopie d'une somme de sphères de dimensions $(r(P)-2)$ (si Λ n'est pas de Dedekind ça ne marche pas), donc P_Λ vérifie l'hypothèse de connectivité standard.

Supposons que Λ a pour nombre de classes 1, c.-à-d. que tous les Λ-modules projectifs de type fini sont libres. Alors P_Λ n'a effectivement qu'un seul objet de rang 1 (à isomorphisme près) et l'on peut appliquer le Théorème 1.

La première partie du théorème appliquée à P_Λ est alors le théorème de stabilité de van der Kallen. La deuxième partie du théorème s'applique aux anneaux satisfaisant $H_1(GL_2(\Lambda)\,, GL_1(\Lambda)\,;\mathbb{Z}) = 0$ et donne que $H_d(GL_n(\Lambda)\,, GL_{n-1}(\Lambda)\,;\mathbb{Z}) = 0$ pour $3d \leq 2n-1$. Cela est vérifié par exemple pour tous les corps de nombres sauf $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ avec $d \neq 1\,, 2\,, 3\,, 7\,, 11$. De même, si $H_1(GL_2(\Lambda)\,, GL_1(\Lambda)\,;\mathbb{Z})$ est fini d'ordre N, alors $H_d(GL_n(\Lambda)\,, GL_{n-1}(\Lambda)\,;\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]) = 0$ pour $3d \leq 2d-1$, ce qui s'applique par exemple à $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $N = 2$ (nouveau).

2.2 Groupes linéaires généraux de $\mathbb{F}_q$

On peut spécialiser l'exemple précédent à $\Lambda = \mathbb{F}_q$ pour $q = p^m$.

Soit $\ell \neq p$ un nombre premier. Quillen a calculé $H_*(GL_n(\mathbb{F}_q)\,;\mathbb{F}_\ell)$. Posons $\alpha > 0$ le plus petit entier vérifiant $q^\alpha \equiv 1 \pmod{\ell}$. Alors

$$H_{*,*}(\mathbf{R};\mathbb{F}_\ell) \cong \mathbb{F}_\ell[\sigma, \xi_1, \xi_2, \dots] \otimes \Lambda_{\mathbb{F}_\ell}[\eta_1, \eta_2, \dots],$$

où $\deg\sigma = (1\,,0)$, $\deg\xi_i = (r\,, 2ir)$ et $\deg\eta_i = (r\,, 2ir-1)$. Clairement, $H_{*,*}(\overline{\mathbf{R}}/\sigma\,;\mathbb{F}_\ell) = \mathbb{F}_\ell[\xi_i] \otimes \Lambda[\eta_j]$ s'annule en bidegrés $(n\,,d)$ vérifiants $\frac{d}{n} < 2 - \frac{1}{r}$.

Le cas $\ell = p$ n'est cependant pas connu. Quillen a toutefois montré que $H_{n,d}(\mathbf{R}\,;\mathbb{F}_p) = 0$ pour $0 < d < n(p-1)$, amélioré par Friedlander–Parshall à $0 < d < n(2p-3)$.

L'application naturelle $E_\infty(S^{1,0}\sigma) \to \mathbf{R}$ est un isomorphisme sur $H_*(-\,;\mathbb{F}_p)$ pour $* < 2p-3$ (le degré où apparaît la plus petite classe d'homologie de $E_\infty(S^{1,0}\sigma)$). En appliquant les résultats de la section précédente sur les anneaux de Dedekind et en transférant la ligne d'annulation, on trouve $H^{E_\infty}_{n,d}(\mathbf{R}\,, E_\infty(S^{1,0}\sigma)\,;\mathbb{F}_p) = 0$ pour $\frac{d}{n} < \frac{2p-3}{2p-2}$. D'après le calcul de Cohen, on a $H_{n,d}(E_\infty(S^{1,0}\sigma)\,;\mathbb{F}_p) = 0$ pour $\frac{d}{n} < \frac{2p-3}{p}$. On en déduit que $H_{n,d}(\mathbf{R}/\sigma\,;\mathbb{F}_p) = 0$ pour $\frac{d}{n} < \frac{2p-3}{2p-2}$. On en déduit la stabilité homologique de $H_d(GL_n(\mathbb{F}_p)\,;\mathbb{F}_p)$ avec pente $\frac{2p-3}{2p-2}$.

Remarque 4. Quillen l'a montré avec pente 1 pour $q \neq 2$ (voir le papier d'applications).