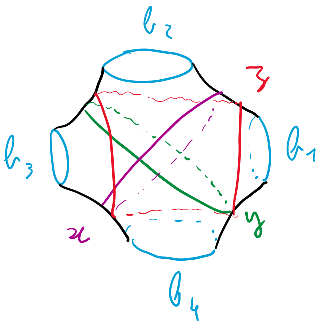
Mapping class groups and the symplectic representation (Laura Marino 2/2)

mercredi 6 décembre 2023 09:14

Lantern relation



$$T_x T_y T_z = T_{b_1} T_{b_2} T_{b_3} T_{b_4}$$

Thm 1 (Dehn) Quand $n = b = 0$, $\mathrm{Mod}(S_g)$ est engendré par un nombre fini de Twists de Dehn le long de courbes non séparantes

(On ne va pas le démontrer)

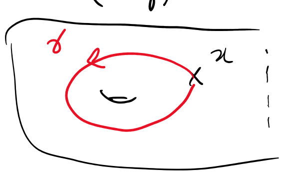
Thm 2 Quand $g \geq 2$, $\mathrm{Mod}(S_{g,n}^b)$ est engendré par un nombre fini de twist de Dehn le long de courbes non-séparantes

Thm 3 Quand $g = 1$ et $b > 1$, $\mathrm{Mod}(S_g^b)$ est engendré par un nombre fini de Twists de Dehn le long de courbes non-séparantes + un nombre fini le long de composantes de bord.

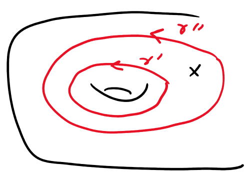
Preuve du thm 2 (Korkmaz) Soit $n \geq 1$, on fixe une pointe x

Il y a une fonction $\varphi : \mathrm{Mod}(S_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,n-1})$ qui oublie la pointe x. Cette fonction est surjective : on peut toujours trouver une isotopie qui ramène la pointe en x. Elle n'est pas injective : $\ker \varphi = \pi_1(S_{g,n-1}, x)$

$$\pi_1(S_{g,n-1}, x) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,n})$$



$$\gamma \longmapsto T_{\gamma'} \cdot T_{\gamma''}^{-1}$$



$$\varphi(T_{\gamma'} T_{\gamma''}^{-1}) = T_\gamma T_\gamma^{-1} = 1 \Rightarrow \mathrm{im}(\dots) \subset \ker \varphi$$

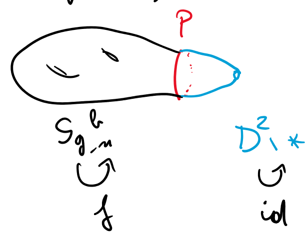
(on ne démontre pas que $\pi_1(S_{g,n-1}; x) \cong \ker \varphi$)

$\Rightarrow$ suite exacte de Birman : $1 \to \pi_1(S_{g,n-1}) \to \mathrm{Mod}(S_{g,n}) \to \mathrm{Mod}(S_{g,n-1}) \to 1$

Soit $b \geq 1$, on fixe une composante de bord $P \subset \partial S_{g,n}^b$

Soit $b \geq 1$, on fixe une composante de bord $P \subset \partial S_{g,m}$

$$\Psi : \mathrm{Mod}(S_{g,m}^{b}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,m+1}^{b-1})$$
$$f \longmapsto$$



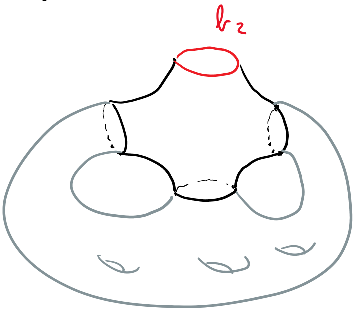
La fonction Ψ est surjective mais pas injective : $T_P \in \ker \Psi$
(T_P = twist le long d'une courbe // P)

$\Rightarrow$ suite exacte $1 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Mod}(S_{g,m}^{b}) \to \mathrm{Mod}(S_{g,m+1}^{b-1})$

Thm Dehn + récurrence $\Rightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,m}^{b})$ engendré par un nb fini de twists de Dehn le long de courbes non sép + courbes // comp de bord

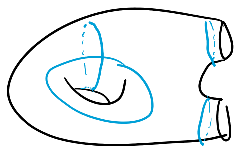
on veut les éliminer

Si $g \geq 2$, on peut appliquer la relation lanterne :



$$\underbrace{T_{b_2}}_{\text{séparante}} = \underbrace{T_{b_1}^{-1} T_x T_y T_z T_{b_4}^{-1} T_{b_3}^{-1}}_{\text{aucune des courbes n'est séparante}}$$

Si $g = 1$ et $b > 1$:



§ Structure symplectique

Nombre d'intersection algébrique de deux courbes : $\hat{\imath}(\alpha, \beta)$

$$\hat{\imath}(\alpha, \beta) = \sum_{x \in \alpha \cap \beta} \mathrm{ind}(x)$$

où : $\beta \uparrow$, $\to \alpha$ $\Rightarrow \mathrm{ind} = +1$; $\beta \downarrow$, $\to \alpha$ $\Rightarrow \mathrm{ind} = -1$

- $\hat{\imath}(\alpha, \beta)$ dépend seulement de $[\alpha], [\beta] \in H_1(S; \mathbb{Z})$
- $\hat{\imath}(\alpha, \beta) = -\hat{\imath}(\beta, \alpha)$
- Si α est séparante, $\hat{\imath}(\alpha, \beta) = 0 \quad \forall \beta$

* Soit $b \in \{0,1\} \Rightarrow \hat{\imath} : H_1(S_g;\mathbb{Z}) \otimes H_1(S_g;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$

⇒ forme bilinéaire alternée non dégénérée (par la dualité de Poincaré $H_1(S_g) \xrightarrow{\simeq} H^1(S_g)$)

⇒ $(H_1(S_g), \hat{\imath})$ est appelé un réseau unimodulaire (ou Lefschetz si $b=1$)

$\quad \cong \mathbb{Z}^{2g}$ $\qquad$ $\hat{\imath}$ est une forme symplectique

* Soit $b > 0 \Rightarrow \hat{\imath}$ est alternée mais dégénérée en général

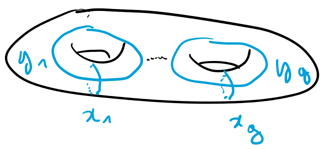
→ dualité de Lefschetz : $H_1(S_g^b) \xrightarrow[\text{pas inj}]{} H_1(S_g^b, \partial S_g^b) \xrightarrow{\simeq} H^1(S_g^b)$

Si α est // à une composante de S_g^b, alors $[\alpha] = 0$ dans $H_1(S, \partial S)$

Dans ce cas, on dit que $(H_1(S_g^b), \hat{\imath})$ est un réseau quasi-unimodulaire

Une base symplectique est une base $(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g)$
tq $\hat{\imath}(x_i, x_j) = \hat{\imath}(y_i, y_j) = 0$, $\hat{\imath}(x_i, y_j) = \delta_{ij}$

Elle est géométrique si les m̂ rel° sont vérifiées pour le nb d'∩ géométrique



Soit $H = H_1(S_g;\mathbb{Z})$. Le groupe symplectique est

$$Sp(H, \mathbb{Z}) = \{ f \in \mathrm{Aut}(H) \mid \hat{\imath}(f(-), f(-)) = \hat{\imath}(-,-) \}$$

Une transvection symplectique le long d'un élément $a \in H$ est
$$T_a(b) = b + \hat{\imath}(a,b) \cdot a$$

- $Sp(H;\mathbb{Z})$ est engendré par les transvections

Un élément $a \in H$ est primitif si $\nexists (m \geq 2, b \in H) \,/\, a = mb$
Une transvection T_a est primitive si a l'est

Prop Un élément de H est primitif $\Leftrightarrow$ il est représenté par une courbe simple fermée

§ Représentation symplectique

§ Représentation symplectique

$$\mathrm{Mod}(S_g) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Aut}(H), \quad f \longmapsto f_*$$
$$= \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{2g})$$
$$= GL(2g, \mathbb{Z})$$

$\mathrm{im}\,\Psi \subset Sp(2g, \mathbb{Z})$ car un homéo préserve $\hat{i}$

$\Rightarrow \Psi : \mathrm{Mod}(S_g) \longrightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$ s'appelle la représentation symplectique de $\mathrm{Mod}(S_g)$

prop Soit a, b courbes dans S_g, alors $\forall k \geq 0$,

$$\Psi(T_b^k)([a]) = [a] + k\,\hat{i}(a,b)\cdot[b]$$

preuve • Si b est séparante, on peut trouver une base géom symplectique $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$ tq $i(a_i, b) = i(b_i, b) = 0 \ \forall i$
et on a bien $\Psi(T_b) = id$

• Si b est non séparante, on peut trouver une base similaire avec $b = b_1$
Soit c un élément de la base
→ si $c \neq a_1$, alors $i(b,c) = \hat{i}(b,c) = \hat{i}(b_1,c) = 0$
et on a aussi $\Psi(T_b)([c]) = [c]$
→ si $c = a_1$, on a $i(c,b) = 1$ et on a bien $\Psi(T_b)([c]) = [c] + [b]$
$\Psi(T_b)([a]) = [a]$
si $a \neq c$

thm Ψ est surjective si $g \geq 1$ (car $\mathrm{im}(\Psi)$ contient les transvections)

§ Lemme 2.2

Une multicourbe M est une classe d'isotopie de courbes simples fermées disjointes dans S_g

$$S \setminus M \hookrightarrow S \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(S \setminus M) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S)$$
extension par l'identité

lemme 2.2 (Minahan) Soit $g \geq 2$, $b \geq 0$, $M \subset S_g^b$ une multicourbe non séparante

Lemme [illegible] soit $g \geq 2$, $b \geq 0$, $M \subset S_g$ une multicourbe non séparante

tq $g(S_g^b \searrow M) \geq 1$. Soit G l'image de $\mathrm{Mod}(S_g^b \searrow M) \to \mathrm{Mod}(S_g^b) \to \mathrm{Aut}(H_1(S_g^b), \hat{i})$

Alors 1) G est finiment engendré par des transvections primitives

2) Si $T_a \in G$ est une transvection primitive, alors G est normalement engendré par T_a.

preuve $S_g^b \searrow M = S_{g'}^{b'}$, $g' \geq 1$ car M non sép.

1) $\mathrm{Mod}(S_{g'}^{b'})$ est finiment engendrée par des twists de Dehn le long de courbes non séparantes & courbes // comp de bord. On appelle $\mathcal{D}$ cet ensemble de générateurs. Si a est séparante alors $\Psi(T_a) = \mathrm{id}$.

Si a n'est pas séparante alors $\Psi(T_a)$ est une transvection primitive.

$\Rightarrow$ G est engendré par des transvections primitives

2) Découle du principe du chgt de coordonnées

Si a n'est pas séparante, alors T_a est conjugué à tout autre twist de Dehn le long d'une courbe non séparante