L'opérade Swiss-Cheese et le centre de Drinfeld

Najib Idrissi

Laboratoire Paul Painlevé

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Plan

1. Tresses et petits disques
2. L'opérade Swiss-Cheese
3. Modèle rationnel : diagrammes de cordes

Plan

1. Tresses et petits disques

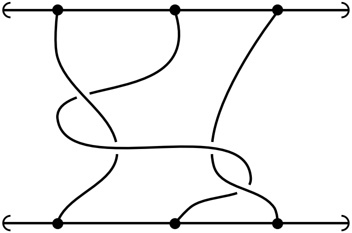
2. L'opérade Swiss-Cheese

3. Modèle rationnel : diagrammes de cordes

Groupes de tresses

Rappel : groupe des tresses pures

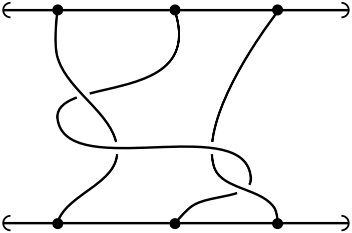
P_r



Groupes de tresses

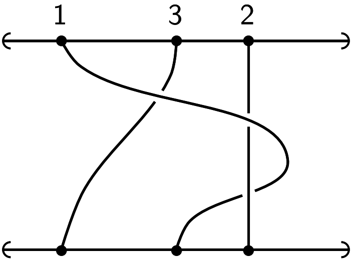
Rappel : groupe des tresses pures

$$P_r$$



Extension : groupoïde des tresses colorées

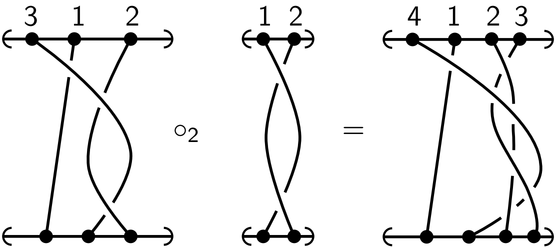
$$\mathtt{CoB}(r)$$



$\mathrm{ob}\,\mathtt{CoB}(r) = \Sigma_r$,
$\mathrm{End}_{\mathtt{CoB}(r)}(\sigma) \cong P_r$

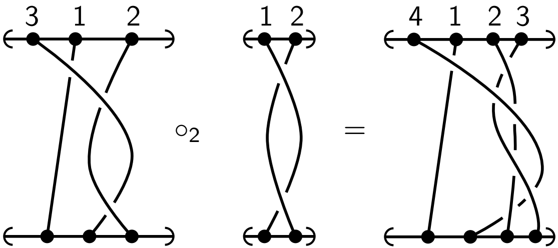
Câblage

« Câblage » : insertion d'une tresse dans un brin



Câblage

« Câblage » : insertion d'une tresse dans un brin



Donne à $\{\mathtt{CoB}(r)\}_{r\geq 1}$ une structure d'opérade symétrique dans la catégorie des groupoïdes :

$$\circ_i : \mathtt{CoB}(k) \times \mathtt{CoB}(l) \to \mathtt{CoB}(k+l-1),\ 1 \leq i \leq k$$

Algèbres sur les opérades catégoriques

Soit $\mathtt{P} \in \mathsf{CatOp}$. Une $\mathtt{P}$-algèbre est la donnée de :

- Une catégorie C ;
- Pour tout objet $x \in \operatorname{ob} \mathtt{P}(r)$, un *foncteur* $\bar{x} : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$;
- Pour tout morphisme $f \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{P}(r)}(x, y)$, une *transformation naturelle*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\times r} \arrow[r, bend left=50, "\bar{x}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\bar{y}"'{name=D}] & \mathsf{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\bar{f}"] \end{tikzcd}$$

- $+$ compatibilité avec les actions des groupes symétriques et avec les compositions opéradiques.

Algèbres sur l'opérade $\mathtt{CoB}$

Pour $\mathtt{P} = \mathtt{CoB}$, les algèbres consistent en :

- Catégorie C ;
- $\sigma \in \operatorname{ob} \mathtt{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$;

Algèbres sur l'opérade $\mathtt{CoB}$

Pour $\mathtt{P} = \mathtt{CoB}$, les algèbres consistent en :

- Catégorie C ;
- $\sigma \in \operatorname{ob}\mathtt{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$;

Algèbres sur l'opérade $\mathtt{CoB}$

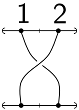
Pour $\mathtt{P} = \mathtt{CoB}$, les algèbres consistent en :

- Catégorie C ;
- $\sigma \in \mathrm{ob}\,\mathtt{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$;
- $\otimes_{\mathrm{id}_2}(\otimes_{\mathrm{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\mathrm{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\mathrm{id}_2}(X, \otimes_{\mathrm{id}_2}(Y, Z))$, etc.

Algèbres sur l'opérade $\mathtt{CoB}$

Pour $\mathtt{P} = \mathtt{CoB}$, les algèbres consistent en :

- Catégorie C ;
- $\sigma \in \operatorname{ob} \mathtt{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$;
- $\otimes_{\mathrm{id}_2}(\otimes_{\mathrm{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\mathrm{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\mathrm{id}_2}(X, \otimes_{\mathrm{id}_2}(Y, Z))$, etc.
- Tresse colorée $\beta : \sigma \to \sigma' \rightsquigarrow$ transformation naturelle $\beta_* : \otimes_\sigma \to \otimes_{\sigma'}$. Par exemple :

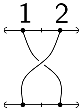


$\rightsquigarrow \tau_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$

Algèbres sur l'opérade $\mathtt{CoB}$

Pour $\mathtt{P} = \mathtt{CoB}$, les algèbres consistent en :

- Catégorie C ;
- $\sigma \in \operatorname{ob} \mathtt{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$;
- $\otimes_{\mathrm{id}_2}(\otimes_{\mathrm{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\mathrm{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\mathrm{id}_2}(X, \otimes_{\mathrm{id}_2}(Y, Z))$, etc.
- Tresse colorée $\beta : \sigma \to \sigma' \rightsquigarrow$ transformation naturelle $\beta_* : \otimes_\sigma \to \otimes_{\sigma'}$. Par exemple :



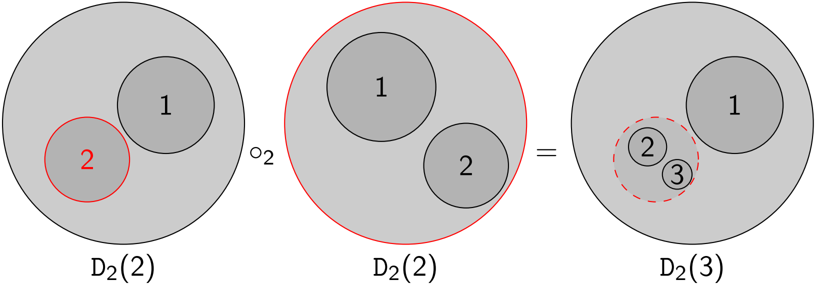
$\rightsquigarrow \tau_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$

Théorème (MacLane, Joyal–Street)

Une algèbre sur $\mathtt{CoB}$ est une catégorie monoïdale tressée (stricte, sans unité).

L'opérade des petits disques

L'opérade topologique $\mathtt{D}_n$ [Boardman–Vogt, May] des petits n-disques gouverne les algèbres à homotopie près :



Lien avec les tresses

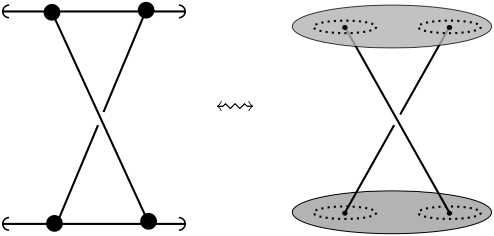
Proposition

$\mathtt{D}_2(r) \simeq \mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_r, 1)$ ($\implies \mathtt{D}_2 \simeq B\pi\mathtt{D}_2$)

Lien avec les tresses

Proposition

$\mathtt{D}_2(r) \simeq \mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_r, 1)$ ($\implies$ $\mathtt{D}_2 \simeq B\pi\mathtt{D}_2$)

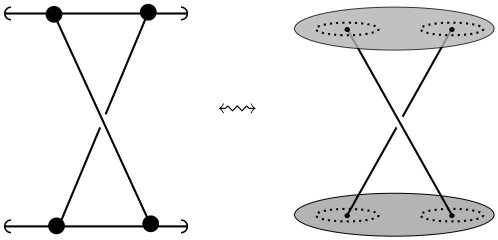


$\mathtt{CoB}(r) \simeq$ sous-groupoïde de $\pi\mathtt{D}_2(r)$

Lien avec les tresses

Proposition

$\mathtt{D}_2(r) \simeq \mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_r, 1)$ ($\Longrightarrow$ $\mathtt{D}_2 \simeq B\pi\mathtt{D}_2$)

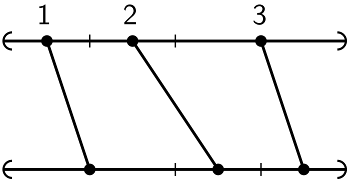


$\mathtt{CoB}(r) \simeq$ sous-groupoïde de $\pi\mathtt{D}_2(r)$

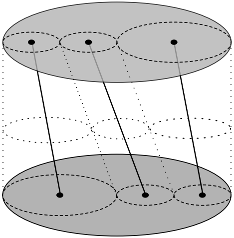
Problème : l'inclusion ne respecte pas la structure d'opérade.

Lien avec les tresses (2)

Il faut passer par les tresses parenthésées PaB :

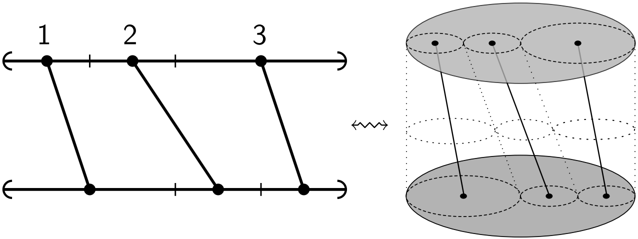


$\leftrightsquigarrow$



Lien avec les tresses (2)

Il faut passer par les tresses parenthésées $\mathtt{PaB}$:



Théorème (Fresse)

Les opérades $\pi \mathrm{D}_2$ et $\mathtt{CoB}$ sont faiblement équivalentes.

$\pi \mathrm{D}_2 \xleftarrow{\sim} \mathtt{PaB} \xrightarrow{\sim} \mathtt{CoB}$ est un zigzag d'équivalences d'*opérades*.

Remarques

Extension du théorème :

Théorème

Une algèbre sur $\mathtt{PaB}$ est une catégorie monoïdale tressée (sans unité).

Versions unitaires $\mathtt{CoB}_+$ et $\mathtt{PaB}_+$:

Théorème

Une algèbre sur $\mathtt{CoB}_+$ (resp. $\mathtt{PaB}_+$) est une catégorie monoïdale tressée stricte (resp. non stricte), avec unité stricte dans les deux cas.

Plan

1 Tresses et petits disques

2 L'opérade Swiss-Cheese

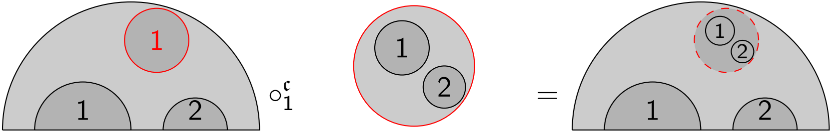
3 Modèle rationnel : diagrammes de cordes

Définition de l'opérade Swiss-Cheese

L'opérade Swiss-Cheese $\mathtt{SC}$ [Voronov 1999] gouverne l'action d'une algèbre $\mathtt{D}_2$ sur une algèbre $\mathtt{D}_1$. C'est une opérade colorée, avec deux couleurs $\mathfrak{c}$ (« *closed* » $\rightsquigarrow \mathtt{D}_2$) et $\mathfrak{o}$ (« *open* » $\rightsquigarrow \mathtt{D}_1$).

Définition de l'opérade Swiss-Cheese

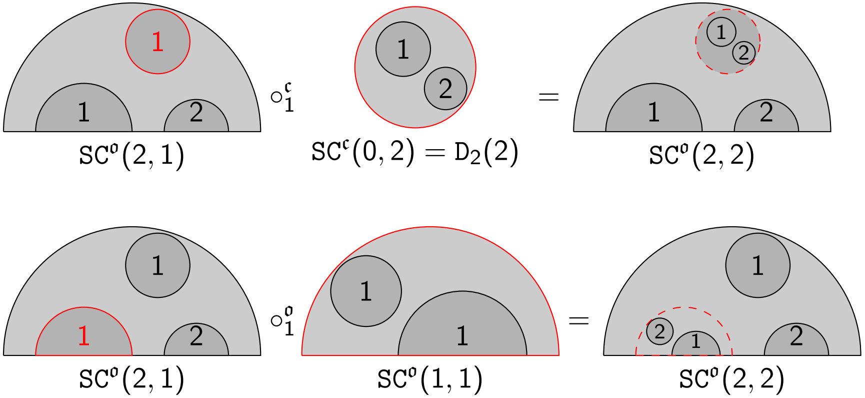
L'opérade Swiss-Cheese $\mathtt{SC}$ [Voronov 1999] gouverne l'action d'une algèbre $\mathtt{D}_2$ sur une algèbre $\mathtt{D}_1$. C'est une opérade colorée, avec deux couleurs $\mathfrak{c}$ (« *closed* » $\rightsquigarrow \mathtt{D}_2$) et $\mathfrak{o}$ (« *open* » $\rightsquigarrow \mathtt{D}_1$).



$\mathtt{SC}^{\mathfrak{o}}(2,1)$ $\quad$ $\mathtt{SC}^{\mathfrak{c}}(0,2) = \mathtt{D}_2(2)$ $\quad$ $\mathtt{SC}^{\mathfrak{o}}(2,2)$

Définition de l'opérade Swiss-Cheese

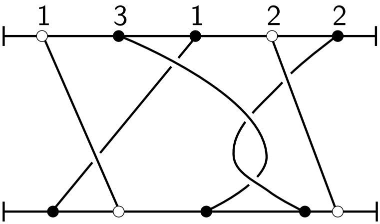
L'opérade Swiss-Cheese $\mathtt{SC}$ [Voronov 1999] gouverne l'action d'une algèbre $\mathtt{D}_2$ sur une algèbre $\mathtt{D}_1$. C'est une opérade colorée, avec deux couleurs $\mathfrak{c}$ (« *closed* » $\rightsquigarrow \mathtt{D}_2$) et $\mathfrak{o}$ (« *open* » $\rightsquigarrow \mathtt{D}_1$).



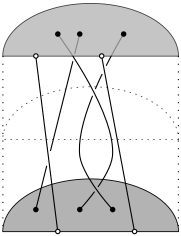
L'opérade CoPB

Idée

Étendre CoB pour fabriquer une opérade colorée équivalente à πSC.



$\leftrightsquigarrow$

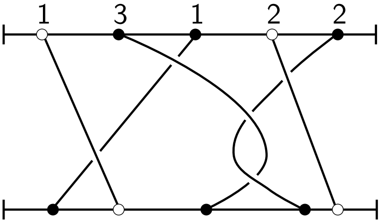


CoPB$(2, 3)$

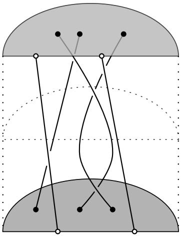
L'opérade CoPB

Idée

Étendre CoB pour fabriquer une opérade colorée équivalente à πSC.



$\rightsquigarrow$



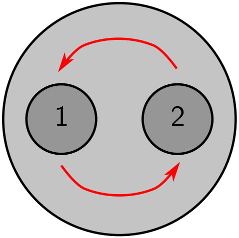
$\mathtt{CoPB}(2,3)$

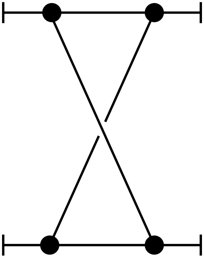
Théorème (I.)

$$\pi\mathrm{SC} \simeq \mathtt{CoPB}.$$

Tressages et semi-tressages

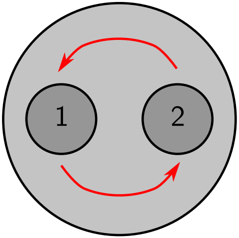
Dans $\mathtt{D}_2$ / $\mathtt{CoB}$: tressage = commutativité à homotopie près

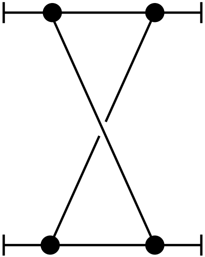




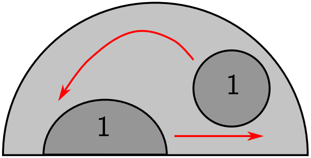
Tressages et semi-tressages

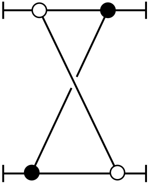
Dans $\mathtt{D}_2$ / $\mathtt{CoB}$: tressage = commutativité à homotopie près





Dans $\mathtt{SC}$ / $\mathtt{CoPB}$: semi-tressage = morphisme « central »





Centre de Drinfeld

C : catégorie monoïdale $\rightsquigarrow$ ΣC la bicatégorie à un objet associée $\rightsquigarrow$ centre de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathsf{C}) := \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\Sigma\mathsf{C}})$:

- objets : (X, Φ) où $X \in \mathsf{C}$ et $\Phi : (X \otimes -) \xrightarrow{\cong} (- \otimes X)$ (« semi-tressage ») ;
- $\{$morphismes $(X, \Phi) \to (Y, \Psi)\} = \{$morphismes $X \to Y$ compatibles avec Φ et $\Psi\}$.

Théorème (Drinfeld, Joyal–Street 1991, Majid 1991)

$\mathcal{Z}(\mathsf{C})$ est une catégorie monoïdale tressée avec

$$(X, \Phi) \otimes (Y, \Psi) = (X \otimes Y, (\Psi \otimes 1) \circ (1 \otimes \Phi)),$$

$$\tau_{(X,\Phi),(Y,\Psi)} = \Phi_Y .$$

Théorème de Voronov

Théorème (Voronov)

Une algèbre sur $H_*(\mathtt{SC})$ consiste en la donnée :

- D'une algèbre associative A ;
- D'une algèbre de Gerstenhaber B ;
- D'un morphisme central d'algèbres commutatives $B \to Z(A)$.

(Rappel : $H_*(\mathtt{D}_1) = \mathtt{Ass}$, $H_*(\mathtt{D}_2) = \mathtt{Ger}$)

Algèbres sur $\mathtt{CoPB}$

Théorème (I.)

Une algèbre sur $\mathtt{CoPB}$ consiste en la donnée :

- D'une catégorie monoïdale (stricte sans unité) N ;
- D'une catégorie monoïdale tressée (stricte sans unité) M ;
- D'un foncteur monoïdal tressé (strict) $F : \mathsf{M} \to \mathcal{Z}(\mathsf{N})$.

$\to$ analogue du théorème de Voronov

Algèbres sur CoPB

Théorème (I.)

Une algèbre sur CoPB consiste en la donnée :

- D'une catégorie monoïdale (stricte sans unité) N ;
- D'une catégorie monoïdale tressée (stricte sans unité) M ;
- D'un foncteur monoïdal tressé (strict) $F : \mathsf{M} \to \mathcal{Z}(\mathsf{N})$.

$\rightarrow$ analogue du théorème de Voronov

Remarque

Comme pour CoB, il existe une version non-stricte du théorème, ainsi qu'une version unitaire.

Comparaison avec le théorème de Voronov

Théorème (Voronov)

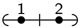
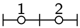
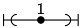
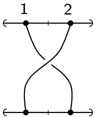
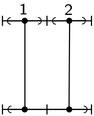
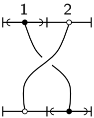
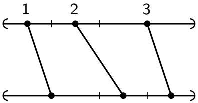
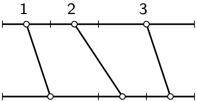
Une algèbre sur $H_*(\mathtt{SC})$ consiste en la donnée :

- D'une algèbre associative A ;
- D'une algèbre de Gerstenhaber B ;
- D'un morphisme central d'algèbres commutatives $B \to Z(A)$.

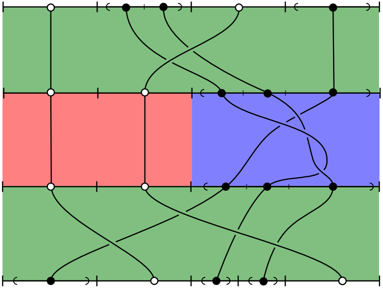
(Rappel : $H_*(\mathtt{D}_1) = \mathtt{Ass}$, $H_*(\mathtt{D}_2) = \mathtt{Ger}$)

Les générateurs

On veut décrire PaPB par générateurs et relations.

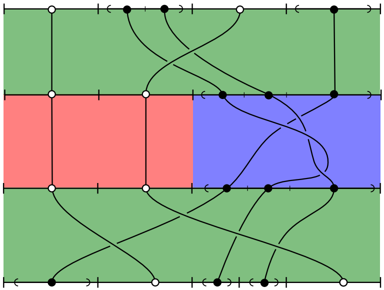
$\mu_{\mathfrak{c}} \in \mathrm{ob}\,\mathtt{PaB}(2)$	$\mu_{\mathfrak{o}} \in \mathrm{ob}\,\mathtt{PaPB}(2,0)$	$f \in \mathrm{ob}\,\mathtt{PaPB}(0,1)$	$\tau \in \mathtt{PaB}(2)$
			
$p \in \mathtt{PaPB}(0,2)$	$\psi \in \mathtt{PaPB}(1,1)$	$\alpha_{\mathfrak{c}} \in \mathtt{PaB}(3)$	$\alpha_{\mathfrak{o}} \in \mathtt{PaPB}(3,0)$
			

Idée de la preuve



Tous les morphismes se décomposent comme à gauche.

Idée de la preuve



Tous les morphismes se décomposent comme à gauche. L'image d'un tel morphisme est bien définie par les relations :

- Théorèmes de cohérence de MacLane et Epstein.
- Adaptation de la preuve du théorème sur PaP et du théorème sur PaB.

Plan

1. Tresses et petits disques
2. L'opérade Swiss-Cheese
3. Modèle rationnel : diagrammes de cordes

Opérade des diagrammes de cordes

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno :

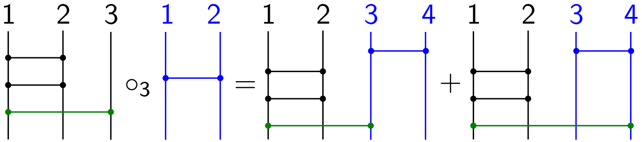
$$\mathfrak{p}(r) = \mathbb{L}(t_{ij})_{1\leq i\neq j\leq r}/\langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}]\rangle.$$

Opérade des diagrammes de cordes

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno :

$$\mathfrak{p}(r) = \mathbb{L}(t_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r} / \langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] \rangle.$$

Structure d'opérade (sur l'algèbre enveloppante) :



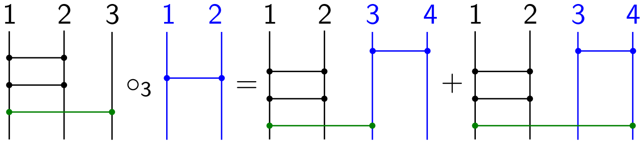
$$t_{13} t_{12} t_{12} \circ_3 t_{12} \in \mathbb{U}\mathfrak{p}(4)$$

Opérade des diagrammes de cordes

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno :

$$\mathfrak{p}(r) = \mathbb{L}(t_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r} / \langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] \rangle.$$

Structure d'opérade (sur l'algèbre enveloppante) :



$$t_{13} t_{12} t_{12} \circ_3 t_{12} \in \mathbb{U}\mathfrak{p}(4)$$

Complétion (de Mal'cev) :

$$\widehat{\mathtt{CD}} = \mathbb{G}\hat{\mathbb{U}}\hat{\mathfrak{p}}$$

opérade dans la catégorie des group(oïde)s complets, associée à la complétion de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ en chaque arité ($\approx$ exponentielles formelles).

Associateurs de Drinfeld

Associateurs de Drinfeld ($\mu \in \mathbb{Q}^\times$) :

$$\mathrm{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) = \{\phi : \mathtt{PaB}_+ \to \widehat{\mathtt{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}.\}$$

Si $\phi \in \mathrm{Ass}^\mu(\mathbb{Q})$, alors :

$$\Phi(t_{12}, t_{23}) := \phi(\alpha) \in \mathbb{G}(\mathbb{Q}[[t_{12}, t_{23}]])$$

vérifie les équations usuelles (pentagone, hexagone).

Associateurs de Drinfeld

Associateurs de Drinfeld ($\mu \in \mathbb{Q}^\times$) :

$$\mathsf{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) = \{\phi : \mathtt{PaB}_+ \to \widehat{\mathtt{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}.\}$$

Si $\phi \in \mathsf{Ass}^\mu(\mathbb{Q})$, alors :

$$\Phi(t_{12}, t_{23}) := \phi(\alpha) \in \mathbb{G}(\mathbb{Q}[[t_{12}, t_{23}]])$$

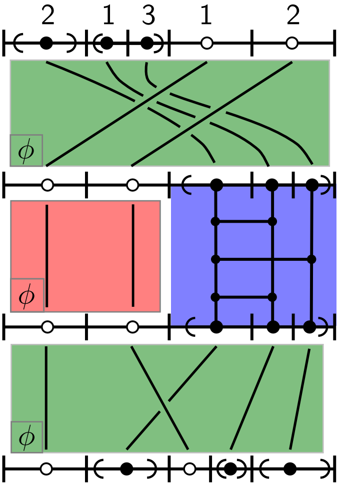
vérifie les équations usuelles (pentagone, hexagone).

Théorème (Drinfeld)

$$\mathsf{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$$

ϕ induit une *équivalence rationnelle* $\pi(\mathtt{D}_2)_+ \simeq \mathtt{PaB}_+ \xrightarrow{\sim_{\mathbb{Q}}} \widehat{\mathtt{CD}}_+$.

Modèle rationnel de $\pi\mathsf{SC}_+$



En s'inspirant de la preuve du théorème, on construit une nouvelle opérade $\mathtt{Pa}\widehat{\mathtt{PCD}}_+^{\phi}$ (pour $\phi \in \mathsf{Ass}^{\mu}(\mathbb{Q})$ fixé).

Théorème (I.)

$$\pi\mathsf{SC}_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \mathtt{Pa}\widehat{\mathtt{PCD}}_+^{\phi}.$$

Formalité

Théorème (Kontsevich 1999 ; Tamarkin 2003, $n = 2$)

L'opérade $\mathtt{D}_n$ est formelle : $C_*(\mathtt{D}_n) \simeq H_*(\mathtt{D}_n)$.

Formalité

Théorème (Kontsevich 1999 ; Tamarkin 2003, $n = 2$)

L'opérade $\mathtt{D}_n$ est formelle : $C_*(\mathtt{D}_n) \simeq H_*(\mathtt{D}_n)$.

En homotopie rationnelle : $\langle H^*(\mathtt{P})\rangle$ à comparer à $\langle \Omega^*(\mathtt{P})\rangle$.

Théorème (Fresse–Willwacher 2015)

$\mathtt{D}_n \simeq_{\mathbb{Q}} \langle H^*(\mathtt{D}_n)\rangle^{\mathbb{L}} \implies \mathtt{D}_n$ est formelle sur $\mathbb{Q}$.

Non-formalité

$H_*(\mathtt{SC}) = \mathtt{Ger} \otimes \mathtt{Ass}$ est un « produit de Voronov » :

$$\begin{aligned} & H^*(\mathtt{SC}) \cong \big(\mathtt{Ger} \otimes \mathtt{Ass}\big)^* \cong \mathtt{Ger}^* \otimes \mathtt{Ass}^* \\ \Longrightarrow\ & \langle H^*(\mathtt{SC})\rangle^{\mathbb{L}} \simeq \langle \mathtt{Ger}^*\rangle^{\mathbb{L}} \times \langle \mathtt{Ass}^*\rangle^{\mathbb{L}} \\ \Longrightarrow\ & \pi\langle H^*(\mathtt{SC})\rangle^{\mathbb{L}} \simeq_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathtt{CD}} \times \mathtt{PaP} \end{aligned}$$

Non-formalité

$H_*(\mathtt{SC}) = \mathtt{Ger} \otimes \mathtt{Ass}$ est un « produit de Voronov » :

$$\begin{aligned} & H^*(\mathtt{SC}) \cong \left(\mathtt{Ger} \otimes \mathtt{Ass}\right)^* \cong \mathtt{Ger}^* \otimes \mathtt{Ass}^* \\ \Longrightarrow\ & \langle H^*(\mathtt{SC})\rangle^{\mathbb{L}} \simeq \langle \mathtt{Ger}^*\rangle^{\mathbb{L}} \times \langle \mathtt{Ass}^*\rangle^{\mathbb{L}} \\ \Longrightarrow\ & \pi\langle H^*(\mathtt{SC})\rangle^{\mathbb{L}} \simeq_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathtt{CD}} \times \mathtt{PaP} \end{aligned}$$

Théorème (Livernet 2015)

L'opérade $\mathtt{SC}$ n'est pas formelle.

$$\Longrightarrow\ \langle H^*(\mathtt{SC})\rangle^{\mathbb{L}} \not\simeq_{\mathbb{Q}} \mathtt{SC} \ \Longrightarrow\ \mathtt{PaP}\widehat{\mathtt{CD}}_+^{\phi} \not\simeq_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathtt{CD}} \times \mathtt{PaP}$$

Merci !

Merci de votre attention !

`arXiv:1507.06844`