Opérades

1 Motivation

En mathématiques, on s'intéresse beaucoup aux *algèbres* :

- Algèbre associative $A = \Bbbk$-ev + $\mu : A \otimes A \to A$ tq $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Algèbre commutative $A = \Bbbk$-ev + $\mu : A \otimes A \to A$ tq $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ et $b \cdot a = a \cdot b$.
- Algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \Bbbk$-ev + $\lambda : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tq $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$ et $[b, a] = -[a, b]$.
- Algèbres BV = $\Bbbk$-ev A + μ commut + λ Lie + Δ presque dérivation.

Points communs :

- Des « générateurs », opérations d'une certaine arité (μ, λ, η...)
- Des « symétries » $\mu(y, x) = ...$
- Des « relations ».

But : unifier ces différents « types d'algèbres » dans un cadre commun et trouver un objet associé au type dont les représentations sont les algèbres.

Par exemple : « les algèbres commutatives sont les algèbres sur l'opérade `Com`. »

Pourquoi ? Par exemple, on peut regarder les ev munis d'une involution, ou les représentations de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut regarder les ev munis de $S, T \in \mathrm{End}(V)$ tq $S^4 = 1$ et $(ST)^3 = S^2$, ou bien on peut regarder les représentations de $SL_2(\mathbb{Z})$... Et qu'est-ce qu'on fait quand on n'a pas de présentation simple, e.g. $GL_n(\mathbb{R})$?

2 Définition

L'idée : regarder *toutes* les opérations qui découlent de la définition de notre type d'algèbre, par exemple $(a, b, c) \mapsto a \cdot (b \cdot c)$, $(a, b, c, d) \mapsto [b, \Delta d] \cdot (a \cdot (c \cdot 1))$... Et après au lieu de dire « pour toute algèbre machin on a ces équations », on a directement les équations dans l'opérade. Ça permet par exemple de faire des liens entre les opérades (genre quotient).

L'exemple fondamental : $\mathtt{End}_X$ pour un objet X. Comme vous voyez à chaque fois on a des choses qui « prennent en entrée » un certain nombre d'éléments de X et en ressortent un. On va calquer la définition d'une opérade sur $\mathtt{End}_X$.

G	$\mathtt{End}_X$	$\mathtt{P}$
$G(1) = G$	$\mathtt{End}_X(n) = \mathrm{Map}(X^n, X)$	$\mathtt{P}(n)$
$g \in G \rightsquigarrow \rho_g : X \to X$	$f \in \mathtt{End}_X(n) \rightsquigarrow f : X^n \to X$	Algèbres : $\mathtt{P} \to \mathtt{End}_X$
$e_G \in G$	$\mathrm{id}_X \in \mathtt{End}_X(1)$	$1_{\mathtt{P}} \in \mathtt{P}(1)$
n/a	$(f \cdot \sigma)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$	$\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathtt{P}(n)$
$G \times G \to G$	Composition : arbre	$\mathtt{P}(r) \times \prod \mathtt{P}(k_i) \to \mathtt{P}(\sum k_i)$

3 Exemples

Un groupe (ou plus généralement un monoïde, ou une algèbre associative) G induit une opérade $\mathtt{P}_G$ en posant $\mathtt{P}_G(1) = G$ et $\varnothing$ sinon. Les algèbres sur $\mathtt{P}_G$ sont exactement les représentations de G.

L'opérade des monoïdes commutatifs : $\mathtt{Com}(r) = \{\mu_r\}$ pour $r \geq 1$, et le groupe symétrique agit trivialement. En effet, étant donnés $(a_1, \dots, a_r)$, il n'y a qu'une seule manière de les multiplier, quel que soit l'ordre, vu que tout commute.

L'opérade des monoïdes : $\mathtt{Ass}(r) = \mathfrak{S}_r \cdot \{\mu_r\}$, avec l'action évidente du groupe symétrique. Quand on veut multiplier r éléments, seul leur ordre compte. Il existe un morphisme $\mathtt{Ass} \to \mathtt{Com} \iff$ tout monoïde commutatif est un monoïde.

On peut définir les opérades par générateurs et relations (plutôt dans un contexte algébrique en général). $\mathtt{Lie}$: opérade engendrée par λ en arité 2 avec $\lambda(y, x) = -\lambda(x, y)$ et $\lambda(x, \lambda(y, z)) = \lambda(\lambda(x, y), z) + \lambda(y, \lambda(x, z))$. Quand on calcule $\mathtt{Lie}(n)$ on retombe sur des résultats combinatoires concernant les algèbres de Lie ($\dim \mathtt{Lie}(n) = (n-1)!$). $\exists \mathtt{Lie} \to \mathtt{Ass}$. Parler de Lie-admissible ?

Généralisations : opérades non symétriques, coopérades, PROPs, opérades colorées = multicatégories, ∞-opérades, opérades cycliques...

Remarque. Le mot « opérade » est la contraction de « operation monad ». Pour ceux qui sont allés à l'exposé d'Andrea la semaine dernière, une opérade $\mathtt{P}$ induit une monade (la monade « algèbre libre sur $\mathtt{P}$ ») dont les algèbres sont exactement les algèbres sur $\mathtt{P}$.

4 Opérades E_n

4.1 Principe de reconnaissance

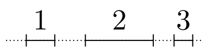
En topologie algébrique, on s'intéresse beaucoup aux espaces de lacets (faire un dessin) :

$$\Omega X = \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$
$$\Omega^n X = \{\gamma : [0,1]^n \to X \mid \gamma(\partial[0,1]^n) = x_0\}$$

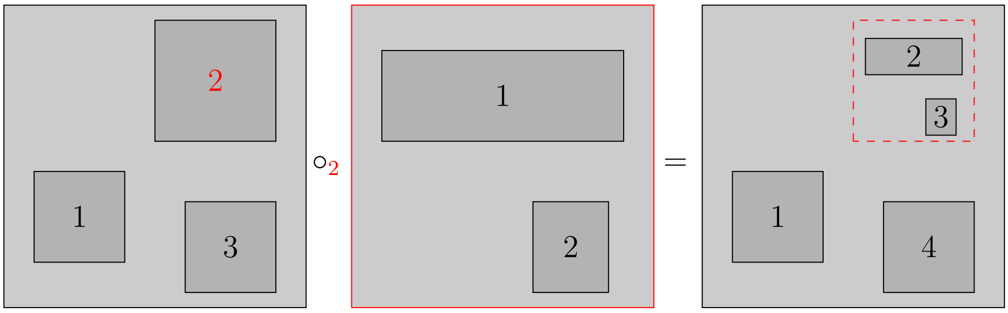
La question est : quand est-ce qu'un espace Y « est » un espace de lacets (itérés) ? La réponse est donnée par les opérades.

On définit **l'opérade des petits cubes** $\mathtt{C}_n$ de manière visuelle. Formellement,

$$\mathtt{C}_n(r) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \mid \alpha_i : [0,1]^n \hookrightarrow [0,1]^n \text{ est rectiligne et } \alpha_i(]0,1[^n) \cap \alpha_j(]0,1[^n) = \varnothing \forall i \neq j\}$$



$\in \mathtt{C}_1(3)$



Proposition. *$\mathtt{C}_n$ est une opérade, et $\Omega^n X$ est une algèbre sur $\mathtt{C}_n$.*

Expliquer pourquoi avec un dessin.

Théorème (Boardman–Vogt, May)**.** *Si Y est une algèbre sur $\mathtt{C}_n$ connexe par arcs, alors $\exists X$ t.q. $Y \simeq \Omega^n X$.*

4.2 Algèbres A_∞

La concaténation des lacets dans ΩX n'est pas *strictement* associative : on a juste $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$. De même $\alpha\alpha^{-1} \sim e_{\Omega X}$ mais pas $=$. A priori c'est donc juste un H-groupe. Mais on a en fait plus de structure, encodée par l'opérade $\mathtt{C}_1$: un monoïde associatif à homotopie cohérente près.

C'est plus facile de regarder la sous-opérade des associahèdres [Stasheff] $A_\infty \subset \mathtt{C}_1$. On a $A_\infty(1) = A_\infty(2) = *$. En arité 3 c'est un segment, en arité 4 un pentagone, et après je ne sais pas le dessiner. $A_\infty(r)$ est contractible (convexe), donc il n'y a « qu'un seul moyen » de passer d'un parenthésage à un autre.

Quel intérêt ? On peut parler d'algèbres A_∞ dans toute catégorie raisonnable. Il arrive souvent que l'on ait des structures associatives mais seulement à homotopie près, et il n'est pas toujours bon de vouloir les strictifier. $(\infty, 1)$-catégories, A_∞-catégories... Les associateurs ne sont pas toujours triviaux et fournissent des informations intéressantes.

Un autre intérêt : en général si $X \simeq Y$ et que Y est un monoïde topologique, on ne peut pas forcément trouver une structure de monoïde topologique sur X qui soit équivalente à celle de Y. On peut cependant trouver une structure A_∞ sur X qui est équivalente à la structure A_∞ sur Y (je triche un peu) induite par $A_\infty \to \mathtt{Ass}$! C'est un exemple de ce qu'on appelle le transfert homotopique.

4.3 Algèbres E_n, $n \geq 2$

Théorème (Eckmann–Hilton)**.** *Soit X un ensemble muni de deux structures de monoïde (avec la même unité pour simplifier) compatibles : $(a \cdot b) * (c \cdot d) = (a * c) \cdot (b * d)$. Alors $\cdot = *$ est commutatif.*

Démonstration. $a \cdot b = (a * 1) \cdot (1 * b) = (a \cdot 1) * (1 \cdot b) = a * b = (1 \cdot a) * (b \cdot 1) = (1 * b) \cdot (a * 1) = b \cdot a$ □

Quel rapport ? On a deux structures de monoïde dans $\Omega^2 X$: la composition horizontale et la composition verticale, et les deux sont compatibles (cf. dessin). On peut adapter l'argument pour montrer qu'elles sont égales à homotopie près et commutatives ! Voir la preuve graphique. D'ailleurs, toutes ces preuves graphiques ont lieu dans $\mathtt{C}_2$: on peut étendre l'argument à toutes les $\mathtt{C}_2$-algèbres.

Mais tout n'est pas rose : si on applique deux fois l'homotopie de commutativité $\alpha\beta \rightsquigarrow \beta\alpha \rightsquigarrow \alpha\beta$, on a effectué une opération non-triviale. En effet, $\mathtt{C}_2(2) \simeq S^1$, et il peut y avoir des obstructions à ce que la multiplication soit commutative de manière cohérente.

Chaque cran supplémentaire $\mathtt{C}_n \rightsquigarrow \mathtt{C}_{n+1}$ rajoute « un niveau » de commutativité, et à la limite il existe une opérade $\mathtt{C}_\infty$ dont les algèbres sont les espaces munis d'une multiplication associative et commutative à homotopie cohérente près, et l'unique morphisme $\mathtt{C}_\infty \to \mathtt{Com}$ est une équivalence.

Le principe de reconnaissance s'étend à $\mathtt{C}_\infty$: si X est une algèbre (connexe par arcs) sur $\mathtt{C}_\infty$, alors il existe une suite d'espaces Y_k telle que $Y_0 = X$ et $Y_k \simeq \Omega Y_{k+1}$. (Pour ceux qui connaissent, c'est un Ω-spectre.) Il y a également une version pour E_∞ du transfert homotopique.