Le modèle de Lambrechts–Stanley des espaces de configuration

Najib Idrissi

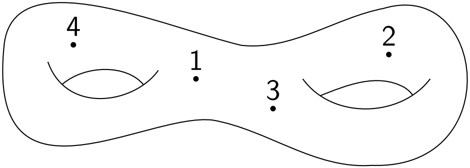
Laboratoire Paul Painlevé

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Espaces de configuration

M : variété lisse compacte sans bord de dimension n (+ adjectifs)

$$\mathrm{Conf}_k(M) = \{(x_1, \dots, x_k) \in M^{\times k} \mid x_i \neq x_j \; \forall i \neq j\}$$



But

Obtenir un modèle de $\mathrm{Conf}_k(M)$ à partir d'un modèle de M

Plan

Modèles

On se place dans le cadre des modèles rationnels/réels :

$$A \simeq \Omega^*(M) \text{ « formes sur } M \text{ » (de Rham, polynomiales par morceaux...)}$$

où A est une CDGA (algèbre différentielle graduée commutative) « explicite »

M simplement connexe $\implies$ A contient tout le type d'homotopie rationnel/réel de M

$\mathrm{Conf}_k(M)$ est une variété lisse aussi ; on cherche une CDGA $\simeq \Omega^*(\mathrm{Conf}_k(M))$ construite à partir de A

Modèles à dualité de Poincaré

CDGA à dualité de Poincaré (A, d, ε) (exemple : $A = H^*(M)$)

- (A, d) : CDGA connexe de type fini ;
- $\varepsilon : A^n \to \mathbb{k}$ t.q. $\varepsilon \circ d = 0$;
- t.q. $A^k \otimes A^{n-k} \to \mathbb{k}$, $a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$ est non-dégénéré

Théorème (Lambrechts–Stanley 2008)

Toute variété simplement connexe admet un tel modèle

$$\begin{tikzcd} \Omega^*(M) \arrow[dr, "\int_M"'] & \cdot \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \exists A \arrow[dl, "\exists\varepsilon"] \\ & \mathbb{k} & \end{tikzcd}$$

Remarque

Hypothèse raisonnable : $\exists L \simeq L'$ non simplement connexe t.q. $\mathrm{Conf}_k(L) \not\simeq \mathrm{Conf}_k(L')$ $\forall k \geq 2$ [Longoni–Salvatore].

Classe diagonale

En cohomologie, on a la classe diagonale

$$[M] \in H_n(M) \mapsto \delta_*[M] \in H_n(M \times M) \qquad \delta(x) = (x, x)$$
$$\leftrightarrow \Delta_M \in H^{2n-n}(M \times M)$$

Représentant explicite dans un modèle à dualité de Poincaré (A, d, ε) :

$$\Delta_A = \sum (-1)^{|a_i|} a_i \otimes a_i^\vee \in (A \otimes A)^n$$

$\{a_i\}$: base graduée ; $\varepsilon(a_i a_j^\vee) = \delta_{ij}$ (Δ_A indépendante de la base choisie)

Propriétés

- $(a \otimes 1)\Delta_A = (1 \otimes a)\Delta_A$ « concentrée autour de la diagonale »
- $A \otimes A \xrightarrow{\mu_A} A$, $\Delta_A \mapsto e(A) = \chi(A) \cdot \mathrm{vol}_A$

Le modèle de Lambrechts–Stanley

$\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ est une variété formelle, de cohomologie [Arnold–Cohen]

$$H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = S(\omega_{ij})_{1 \le i \ne j \le k}/I, \quad \deg \omega_{ij} = n-1$$

$$I = \langle \omega_{ji} = \pm \omega_{ij},\ \omega_{ij}^2 = 0,\ \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0 \rangle.$$

$\mathtt{G}_A(k)$ modèle conjectural de $\mathrm{Conf}_k(M) = M^{\times k} \setminus \bigcup_{i \ne j} \Delta_{ij}$

- « Générateurs » : $A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \le i \ne j \le k}$
- Relations :
  - Relations d'Arnold pour les ω_{ij}
  - $p_i^*(a) \cdot \omega_{ij} = p_j^*(a) \cdot \omega_{ij}$. $(p_i^*(a) = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$
- $d\omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A)$.

Premiers exemples

$$\mathtt{G}_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \le i < j \le k} / J, d\omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A))$$

$$\mathtt{G}_A(0) = \mathbb{R} : \text{modèle de } \mathrm{Conf}_0(M) = \{\varnothing\} \quad \checkmark$$

$$\mathtt{G}_A(1) = A : \text{modèle de } \mathrm{Conf}_1(M) = M \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \mathtt{G}_A(2) &= \left(\frac{A \otimes A \otimes 1 \ \oplus \ A \otimes A \otimes \omega_{12}}{1 \otimes a \otimes \omega_{12} \equiv a \otimes 1 \otimes \omega_{12}}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1 \right) \\ &\cong (A \otimes A \otimes 1 \ \oplus \ A \otimes_A A \otimes \omega_{12}, \ d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\ &\cong (A \otimes A \otimes 1 \ \oplus \ A \otimes \omega_{12}, \ d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\ &\xrightarrow{\sim} A^{\otimes 2} / (\Delta_A) \end{aligned}$$

Historique rapide de $\mathtt{G}_A$

1969 [Arnold–Cohen] $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \approx$ "$\mathtt{G}_{H^*(\mathbb{R}^n)}(k)$"

1978 [Cohen–Taylor] $E^2 = \mathtt{G}_{H^*(M)}(k) \implies H^*(\mathrm{Conf}_k(M))$

1994 Pour les variétés projectives complexes compactes lisses ($\implies$ Kähler) :

- [Kříž] $\mathtt{G}_{H^*(M)}(k)$ modèle de $\mathrm{Conf}_k(M)$
- [Totaro] La SS de Cohen–Taylor SS dégénère

2004 [Lambrechts–Stanley] $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$ modèle de $\mathrm{Conf}_2(M)$ pour une variété 2-connexe

2004 [Félix–Thomas, Berceanu–Markl–Papadima] $\mathtt{G}^{\vee}_{H^*(M)}(k) \cong$ page E^2 de la SS de Bendersky–Gitler pour $H^*(M^{\times k}, \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij})$

2008 [Lambrechts–Stanley] $H^*(\mathtt{G}_A(k)) \cong_{\Sigma_k-\mathsf{gVect}} H^*(\mathrm{Conf}_k(M))$

2015 [Cordova Bulens] $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$ modèle de $\mathrm{Conf}_2(M)$ pour $\dim M = 2m$

Première partie du théorème

Théorème (I.)

Soit M une variété lisse, compacte, sans bord, simplement connexe et de dimension au moins 4. Alors $\mathtt{G}_A(k)$ est un modèle réel de $\mathrm{Conf}_k(M)$ pour tout $k \geq 0$.

$\dim M \geq 3 \implies \mathrm{Conf}_k(M)$ est simplement connexe quand M l'est (cf. fibrations de Fadell–Neuwirth).

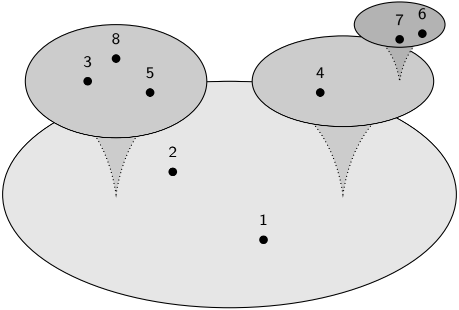
Corollaire

(A, d, ε) contient tout le type d'homotopie réel de $\mathrm{Conf}_k(M)$

En dimension 3 : $M = S^3$ (conjecture de Poincaré) et on peut démontrer directement la conjecture sur $\mathbb{Q}$

Compactification de Fulton–MacPherson

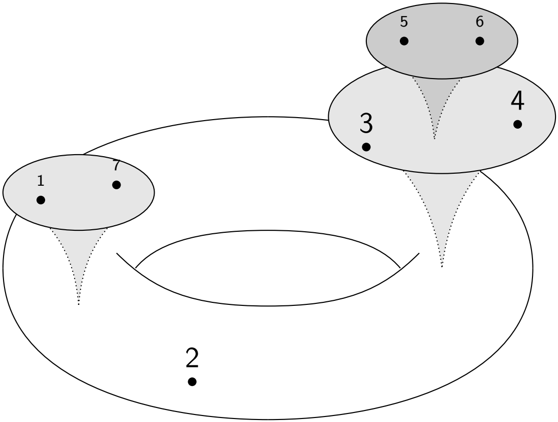
$\mathtt{FM}_n(k)$: Compactification de Fulton–MacPherson de $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$



(+ normalisation pour gérer la non-compacité de $\mathbb{R}^n$)

Compactification Fulton–MacPherson (2)

$\mathtt{FM}_M(k)$: compactification similaire de $\mathrm{Conf}_k(M)$

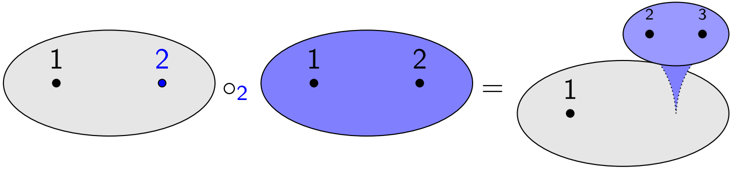


Opérades

Idée

Étudions tout $\{\mathrm{Conf}_k(M)\}_{k \geq 0} \implies$ plus de structure

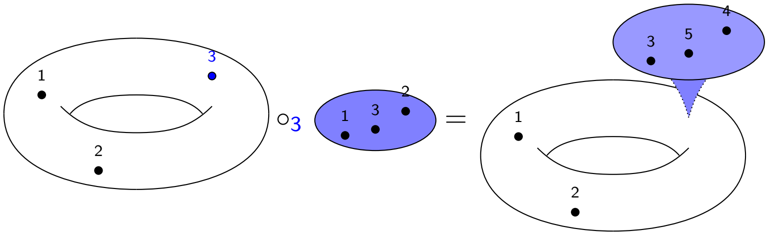
$\mathtt{FM}_n = \{\mathtt{FM}_n(k)\}_{k \geq 0}$ est une opérade : on peut insérer une configuration infinitésimale dans une autre



$$\mathtt{FM}_n(k) \times \mathtt{FM}_n(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathtt{FM}_n(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

Structure de module

M parallélisée $\implies \mathtt{FM}_M = \{\mathtt{FM}_M(k)\}_{k\geq 0}$ est un $\mathtt{FM}_n$-module à droite : on peut insérer une configuration infinitésimale dans une configuration sur M



$$\mathtt{FM}_M(k) \times \mathtt{FM}_n(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathtt{FM}_M(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

Cohomologie de $\mathtt{FM}_n$ et coaction sur $\mathtt{G}_A$

$H^*(\mathtt{FM}_n)$ hérite d'une structure de coopérade de Hopf

On peut récrire :

$$\mathtt{G}_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes H^*(\mathtt{FM}_n(k))/\text{relations}, d)$$

Proposition

$\chi(M) = 0 \implies \mathtt{G}_A = \{\mathtt{G}_A(k)\}_{k \geq 0}$ est un $H^*(\mathtt{FM}_n)$-comodule de Hopf à droite

Motivation

On veut mettre quelque chose ici :

$$\mathtt{G}_A(k) \xleftarrow{\sim} \color{red}{?} \xrightarrow{\sim} \Omega^*(\mathtt{FM}_M(k))$$

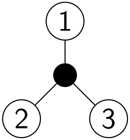
Si c'est vrai, on peut espérer qu'il y a quelque chose là !

$$\begin{array}{ccccc}
\mathtt{G}_A & \xleftarrow{\quad\sim\quad} & \color{red}{?} & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \Omega^*(\mathtt{FM}_M) \\
\circlearrowleft & & \color{red}{\circlearrowleft} & & \circlearrowleft \\
H^*(\mathtt{FM}_n) & \xleftarrow{\quad\sim\quad} & \color{red}{?} & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \Omega^*(\mathtt{FM}_n)
\end{array}$$

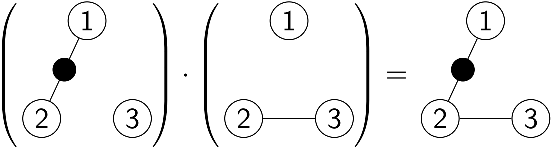
Mais la ligne du bas est déjà connue : formalité de $\mathtt{FM}_n$

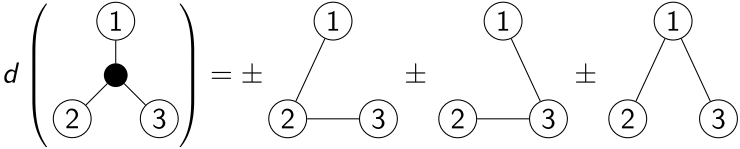
Les complexes de graphes de Kontsevich

[Kontsevich] Coopérade de Hopf $\mathtt{Graphs}_n = \{\mathtt{Graphs}_n(k)\}_{k \geq 0}$



$\in \mathtt{Graphs}_n(3)$





Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014)

Complexes de graphes étiquetés

Rappel :
$$\begin{tikzcd} \Omega^*_{\mathrm{PA}}(M) \arrow[dr, "\int_M"'] & R \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & A \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ complexe de graphes étiquetés $\mathtt{Graphs}_R$:

$$\overset{x}{\textcircled{1}} \!-\!\!-\!\!-\! \overset{y}{\bullet} \in \mathtt{Graphs}_R(1) \quad (\text{where } x, y \in R)$$

$$d\left(\overset{x}{\textcircled{1}} \!-\!\!-\!\!-\! \overset{y}{\bullet} \right) = \overset{dx}{\textcircled{1}} \!-\!\!-\!\!-\! \overset{y}{\bullet} \pm \overset{x}{\textcircled{1}} \!-\!\!-\!\!-\! \overset{dy}{\bullet} \pm \overset{xy}{\textcircled{1}}$$
$$+ \sum_{(\Delta_R)} \pm \left(\overset{x\Delta'_R}{\textcircled{1}} \quad \overset{y\Delta''_R}{\bullet} \right)$$

Identification supplémentaire : $\left(\overset{x}{\textcircled{1}} \quad \overset{y}{\bullet} \right) \equiv \int_M \sigma(y) \cdot \overset{x}{\textcircled{1}}$

Version complète du théorème

Théorème (I., version complète)

Pour toute variété M lisse, compacte, sans bord, simplement connexe et de dimension ≥ 4, on a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathtt{G}_A & \xleftarrow{\sim} & \mathtt{Graphs}'_R & \xrightarrow{\sim} & \Omega^*_{\mathrm{PA}}(\mathtt{FM}_M) \\ \circlearrowleft^{\dagger} & & \circlearrowleft^{\dagger} & & \circlearrowleft^{\ddagger} \\ H^*(\mathtt{FM}_n) & \xleftarrow{\sim} & \mathtt{Graphs}_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega^*_{\mathrm{PA}}(\mathtt{FM}_n) \end{array}$$

† quand $\chi(M) = 0$
‡ quand M est parallélisée

Homologie de factorisation

$\mathtt{FM}_n$-algèbre : espace B + applications (+ compatibilités)

$$\mathtt{FM}_n \circ B = \bigsqcup_{k \geq 0} \mathtt{FM}_n(k) \times B^{\times k} \to B$$

$\approx$ algèbres commutatives « à homotopie près » (jusqu'au degré n)
Homologie de factorisation de M à coefficients dans B :

$$\int_M B := \mathtt{FM}_M \circ^{\mathbb{L}}_{\mathtt{FM}_n} B = \text{“}\operatorname{Tor}^{\mathtt{FM}_n}(\mathtt{FM}_M, B)\text{”}$$
$$= \operatorname{hocoeg}(\mathtt{FM}_M \circ \mathtt{FM}_n \circ B \rightrightarrows \mathtt{FM}_M \circ B)$$

Homologie de factorisation (2)

Dans les complexes de chaînes sur $\mathbb{R}$:

$$\int_M B := C_*(\mathtt{FM}_M) \circ^{\mathbb{L}}_{C_*(\mathtt{FM}_n)} B$$

Formalité $C_*(\mathtt{FM}_n) \simeq H_*(\mathtt{FM}_n) \implies$

$$\mathrm{Ho}(C_*(\mathtt{FM}_n)\text{-Alg}) \simeq \mathrm{Ho}(H_*(\mathtt{FM}_n)\text{-Alg})$$
$$B \leftrightarrow \exists \tilde{B}$$

Théorème complet + « abstract nonsense » $\implies$

$$\int_M B \simeq \mathtt{G}_A^\vee \circ^{\mathbb{L}}_{H_*(\mathtt{FM}_n)} \tilde{B}$$

$\rightsquigarrow$ bien plus calculable (dès qu'on connaît $\tilde{B}$...)

Comparaison avec un théorème de Knudsen

Théorème (Knudsen, 2016)

$$\begin{tikzcd} \texttt{Lie}\text{-Alg} \arrow[rr, dashed, bend left, "\exists U_n"] & \arrow[phantom, "\perp"] & \texttt{FM}_n\text{-Alg} \arrow[ll, "\text{oubli}"] \end{tikzcd}$$

$$\int_M U_n(\mathfrak{g}) \simeq C_*^{\mathrm{CE}}(A_{\mathrm{PL}}^{-*}(M) \otimes \mathfrak{g})$$

Abstract nonsense $\implies$

$$C_*(\texttt{FM}_n)\text{-Alg} \longleftrightarrow H_*(\texttt{FM}_n)\text{-Alg}$$
$$U_n(\mathfrak{g}) \longleftrightarrow S(\Sigma^{1-n}\mathfrak{g})$$

Proposition

$$\mathtt{G}_A^\vee \circ^{\mathbb{L}}_{H_*(\texttt{FM}_n)} S(\Sigma^{1-n}\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathtt{G}_A^\vee \circ_{H_*(\texttt{FM}_n)} S(\Sigma^{1-n}\mathfrak{g}) \cong C_*^{\mathrm{CE}}(A^{-*} \otimes \mathfrak{g})$$

Merci !

Merci de votre attention !

arXiv:1608.08054

Ces diapos en ligne → http://math.univ-lille1.fr/~idrissi/