

Espaces de configuration de variétés compactes

Najib Idrissi

21 décembre 2017

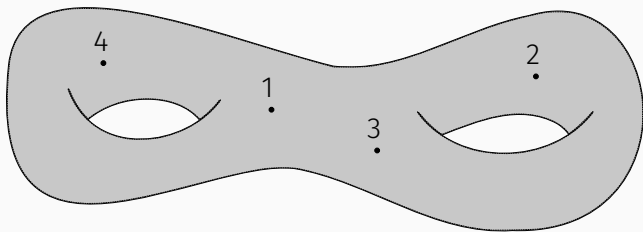
@ Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes



But

Étudier les espaces de configuration des variétés :

$$\text{Conf}_k(M) := \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$$



Idée

Utiliser la « formalité des opérades E_n » : résultats pour $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

On se place dans le cadre des modèles rationnels/réels :

$$A \simeq \Omega^*(M) \ll \text{formes sur } M \gg \text{ (de Rham, polynomiales par morceaux...)}$$

où A est une CDGA « explicite »

→ algèbre différentielle graduée commutative

M nilpotente de type finie $\implies A$ contient tout le type d'homotopie rationnel/réel de M

On cherche une CDGA $\simeq \Omega^*(\text{Conf}_k(M))$ construite à partir de A

Formalité de $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

[Kontsevich] $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ est un espace « formel » sur \mathbb{Q} , c.-à-d. :

$$H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \Omega^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$$

\implies détermine entièrement son type d'homotopie $/\mathbb{Q}$

Théorème (Arnold 1969, Cohen 1976)

- $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq k} / I$
- $\deg \omega_{ij} = n - 1$
- $I = (\omega_{ji} = \pm \omega_{ij}, \omega_{ij}^2 = 0, \omega_{ij} \omega_{jk} + \omega_{jk} \omega_{ki} + \omega_{ki} \omega_{ij} = 0)$

Modèles à dualité de Poincaré

CDGA à dualité de Poincaré (A, ε)

- A : CDGA connexe de type fini; (p.ex. $(H^*(M), d = 0)$)
- $\varepsilon : A^n \rightarrow \mathbb{k}$ t.q. $\varepsilon \circ d = 0$; (p.ex. $f_M(-)$)
- $A^k \otimes A^{n-k} \rightarrow \mathbb{k}$, $a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$ est non-dégén. (p.ex. $H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{k}$)

Théorème (Lambrechts–Stanley 2008)

Toute variété **simplement connexe** admet un tel modèle

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) & \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} & \exists A \\ & \searrow & \swarrow \\ & f_M & \mathbb{k} \\ & & \swarrow \exists \varepsilon \end{array}$$

Remarque

D'après un résultat de Longoni–Salvatore (2005), $\exists L \simeq L'$ non simplement connexe t.q. $\text{Conf}_k(L) \not\cong \text{Conf}_k(L') \forall k \geq 2$.

Le modèle de Lambrechts–Stanley

$\mathbf{G}_A(k)$ modèle conjectural de $\text{Conf}_k(M) = M^{\times k} \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$
 $\rightarrow := \{x_i = x_j\}$

- « Générateurs » : $A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq k}$
- Relations :
 - Relations d'Arnold ; $(\omega_{ji} = \pm \omega_{ij}, \omega_{ij}^2 = \omega_{ij} \omega_{jk} + \omega_{jk} \omega_{ki} + \omega_{ki} \omega_{ij} = 0)$
 - $p_i^*(a) \cdot \omega_{ij} = p_j^*(a) \cdot \omega_{ij}$. $(p_i^*(a) := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$
- $d\omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A) \rightarrow$ tue le dual de $[\Delta_{ij}]$.

Théorème (Lambrechts–Stanley)

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i(\text{Conf}_k(M)) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathbf{G}_A(k))$$

Premiers exemples

$$G_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \leq i < j \leq k} / \text{relations}, d\omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A))$$

$$G_A(0) = \mathbb{Q} \rightarrow \text{modèle de } \text{Conf}_0(M) = \{\emptyset\} \quad \checkmark$$

$$G_A(1) = A \rightarrow \text{modèle de } \text{Conf}_1(M) = M \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} G_A(2) &= \left(\frac{A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes A \otimes \omega_{12}}{1 \otimes a \otimes \omega_{12} \equiv a \otimes 1 \otimes \omega_{12}}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1 \right) \\ &\cong (A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes_A A \otimes \omega_{12}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\ &\cong (A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes \omega_{12}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\ &= \text{cone}(A \xrightarrow{\Delta_A} A^{\otimes 2}) \\ &\xrightarrow{\sim} A^{\otimes 2} / (\Delta_A) \end{aligned}$$

Historique de G_A

1969 [Arnold, Cohen] $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = \mathbf{G}_{H^*(D^n)}(k)$

1978 [Cohen & Taylor] $E^2 = \mathbf{G}_{H^*(M)}(k) \implies H^*(\text{Conf}_k(M))$

~1994 Pour les variétés complexes projectives lisses (\implies Kähler) :

- [Kříž] $\mathbf{G}_{H^*(M)}(k)$ modèle de $\text{Conf}_k(M)$
- [Totaro] La SS de Cohen–Taylor s’effondre

2004 [Lambrechts & Stanley] $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$ modèle de $\text{Conf}_2(M)$ si M est 2-connexe

~2004 [Félix & Thomas, Berceanu & Markl & Papadima] $\mathbf{G}_{H^*(M)}^\vee(k) \cong$
page E^2 de la SS de Bendersky–Gitler $\implies H^*(M^{\times k}, \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij})$

2008 [Lambrechts & Stanley] $H^*(G_A(k)) \cong_{\Sigma_k\text{-gVect}} H^*(\text{Conf}_k(M))$

2015 [Cordova Bulens] $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$ modèle de $\text{Conf}_2(M)$ si $\dim M = 2m$

Première partie du théorème

Théorème

Soit M une variété lisse, compacte, sans bord, simplement connexe, de dimension ≥ 4 . Alors $\mathbf{G}_A(k)$ est un modèle sur \mathbb{R} de $\text{Conf}_k(M)$ pour tout $k \geq 0$.

Corollaire

Le type d'homotopie réel de $\text{Conf}_k(M)$ ne dépend que du type d'homotopie réel de M :

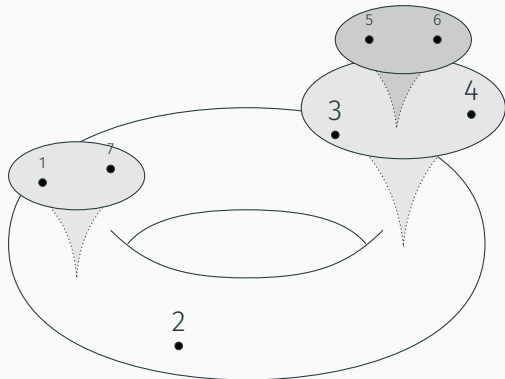
$$M \simeq_{\mathbb{R}} N \implies \text{Conf}_k(M) \simeq_{\mathbb{R}} \text{Conf}_k(N).$$

Idée de la preuve

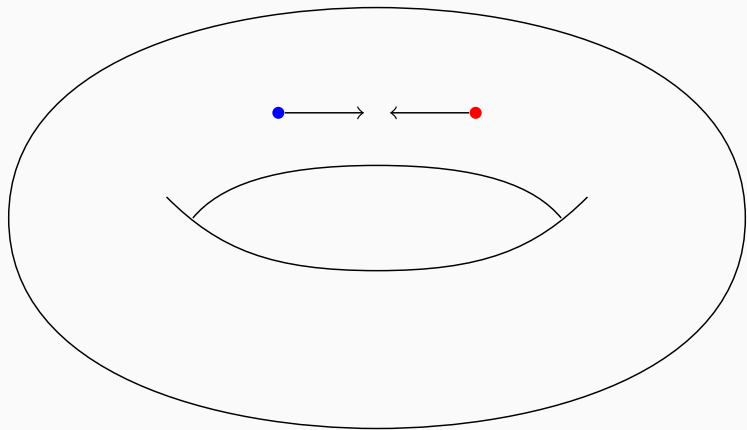
Idée

Étudier $\{\text{Conf}_k(M)\}_{k \geq 0}$: plus de structure \rightarrow module sur une opérade

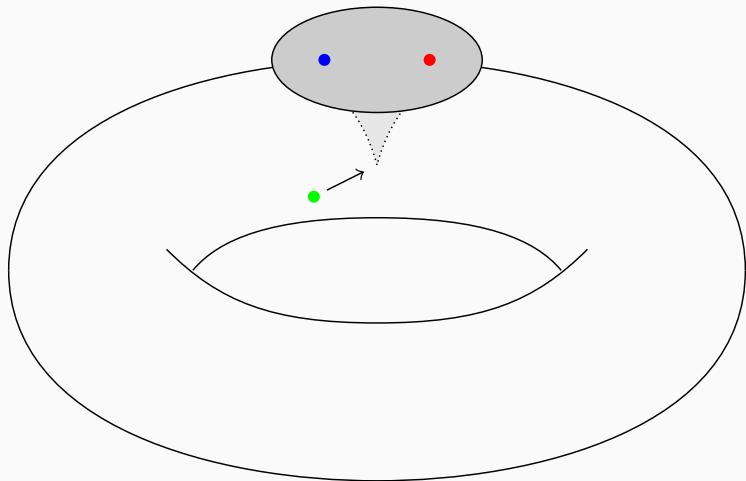
Compactification de Fulton–MacPherson $\text{Conf}_k(M) \xrightarrow{\sim} \text{FM}_M(k)$



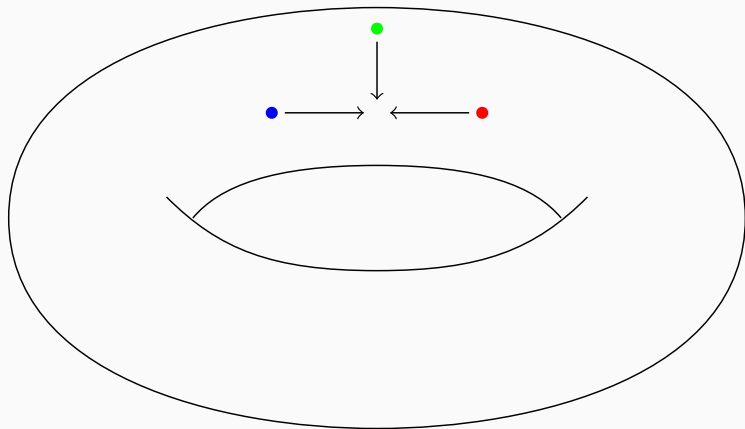
Animation n° 1



Animation n° 2

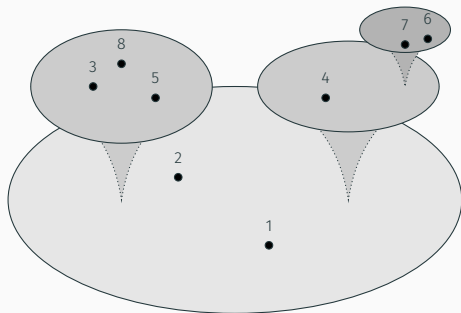


Animation n° 3



Compactification de $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

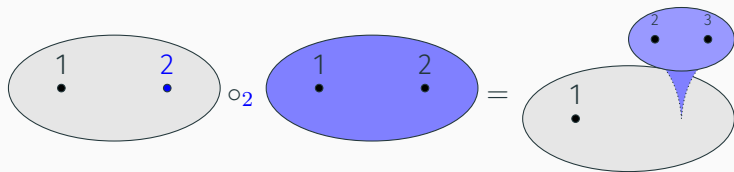
On a aussi $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)/(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}) \xrightarrow{\sim} \text{FM}_n(k)$



(+ normalisation parce que \mathbb{R}^n n'est pas compact)

Opérades

$\mathbf{FM}_n = \{\mathbf{FM}_n(k)\}_{k \geq 0}$ est une **opérade** : on peut « composer » les configurations



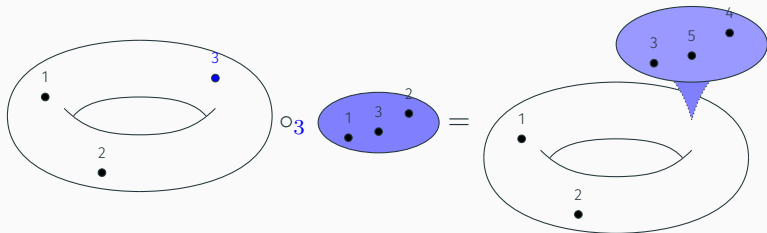
$$\mathbf{FM}_n(k) \times \mathbf{FM}_{\mathbb{R}^n}(l) \xrightarrow{o_i} \mathbf{FM}_n(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

Remarque

Faiblement équivalent à l'opérade des petits disques/cubes.

Modules sur les opérades

M parallélisée $\implies \text{FM}_M = \{\text{FM}_M(k)\}_{k \geq 0}$ est un FM_n -module à droite :
on peut insérer une configuration infinitésimale dans une configuration de M



$$\text{FM}_M(k) \times \text{FM}_n(l) \xrightarrow{o_i} \text{FM}_M(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

$H^*(\mathbf{FM}_n)$ hérite d'une structure de coopérate de Hopf

On peut réécrire

$$\mathbf{G}_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes H^*(\mathbf{FM}_n(k)))/\text{relations, } d)$$

Proposition

$\chi(M) = 0 \implies \mathbf{G}_A = \{\mathbf{G}_A(k)\}_{k \geq 0}$ est un $H^*(\mathbf{FM}_n)$ -comodule de Hopf à droite

Motivation

On cherche à remplir ce diagramme :

$$\mathbf{G}_A(k) \xleftarrow{\sim} ? \xrightarrow{\sim} \Omega^*(\mathbf{FM}_M(k))$$

Si c'est vrai, on peut s'attendre à pouvoir remplir celui-là :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_A & \xleftarrow{\sim} & ? & \xrightarrow{\sim} & \Omega^*(\mathbf{FM}_M) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \boxed{H^*(\mathbf{FM}_n) \xleftarrow{\sim} ? \xrightarrow{\sim} \Omega^*(\mathbf{FM}_n)} & & & & \end{array}$$

↓

Déjà connu : **formalité de l'opérade des petits disques**

Complexes de graphes de Kontsevich

[Kontsevich] Coopérade de Hopf $\mathbf{Graphs}_n = \{\mathbf{Graphs}_n(k)\}_{k \geq 0}$

$$d \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right) = \pm \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \end{array} \pm \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \end{array} \pm \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array}$$

Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014)

$$H^*(\mathbf{FM}_n; \mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} \mathbf{Graphs}_n \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{FM}_n)$$

$$\omega_{ij} \longleftarrow \textcircled{i} \text{---} \textcircled{j} \longrightarrow \text{représentants explicites}$$

$$0 \longleftarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \bullet \\ | \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \longrightarrow \text{intégrales « explicites »}$$

Version complète du théorème

Idée

Construire \mathbf{Graphs}_R qui est à \mathbf{Graphs}_n ce que \mathbf{G}_A est à $H^*(\mathbf{FM}_n)$

Théorème (Version complète, cas sans bord)

M : variété compacte sans bord, simplement connexe, lisse, $\dim M \geq 4$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_A & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_R & \dashrightarrow^{\sim} & \Omega_{\mathbf{P}^A}^*(\mathbf{FM}_M) \\ \circlearrowleft^\dagger & & \circlearrowleft^\dagger & & \circlearrowleft^\ddagger \\ H^*(\mathbf{FM}_n) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\mathbf{P}^A}^*(\mathbf{FM}_n) \end{array}$$

† Si $\chi(M) = 0$

‡ Si M est parallélisée

$$A \xleftarrow{\sim} R \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{P}^A}^*(M)$$

Modèles à dualité de Poincaré–Lefschetz

Maintenant $\partial M \neq \emptyset \implies H^*(M) \cong H_{n-*}(M, \partial M)$ (si M est orientée)

Paire à dualité de Poincaré–Lefschetz ($B \xrightarrow{\lambda} B_\partial$) :

- $(B_\partial, \varepsilon_\partial)$ CDGA à dualité de Poincaré de dim. $n - 1$; (modèle $\partial M, \int_{\partial M}$)
- B : CDGA connexe de t.f.; (modèle M)
- $\lambda : B \twoheadrightarrow B_\partial$: morphisme surjectif; (modèle $\partial M \hookrightarrow M$)
- $\varepsilon : B^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\varepsilon(dy) = \varepsilon_\partial(\lambda(y))$; (modèle $\int_M(-)$ & Stokes)
- soit $K := \ker \lambda$, alors $\theta : B \rightarrow K^\vee[-n]$, $b \mapsto \varepsilon(b \cdot -)$ est un quasi-iso surjectif. ($K \simeq \Omega^*(M, \partial M)$)

Dans ce cas, $A := B / \ker \theta$ est un modèle de M , et $\theta : A \xrightarrow{\cong} K^\vee[-n]$

Existence & exemple de modèle à DPL

Exemple

Si $M = N \setminus \{*\}$ avec N compacte sans bord, soit P un modèle à DP de N , on pose :

$$B = (P \oplus \mathbb{R}V_{n-1}, dv = \text{vol}_P) \rightarrow B_{\partial} = H^*(S^{n-1}) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}V_{n-1}, d = 0)$$

Proposition

Si M et ∂M sont simplement connexes et $\dim M \geq 7$, alors $(M, \partial M)$ admet un modèle à DPL.

Remarque

Également vrai si M admet un « *surjective pretty model* », cf. résultats de Cordova Bulens, Lambrechts et Stanley.

Le dg-module G_A « naïf »

Soit (B, B_∂) un modèle à DPL et $A = B / \ker \theta \simeq B \implies$ même définition de $G_A(k)$

Théorème

$$\dim H^i(\text{Conf}_k(M)) = \dim H^i(G_A(k))$$

Idée de la preuve

On combine :

- Des techniques de Lambrechts–Stanley pour calculer l’homologie d’espaces du type $M^k \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$;
- Des techniques de Cordova Bulens–Lambrechts–Stanley pour calculer l’homologie de $M = N \setminus X$ où N est une variété sans bord et $X \subset N$ est un sous-polyèdre.

Le vrai modèle

En général, $\mathbf{G}_A(k)$ n'est pas un modèle de $\text{Conf}_k(M)$.

Motivation

$$M = S^1 \times (0, 1) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \implies \text{Conf}_2(M) \simeq \text{Conf}_3(\mathbb{R}^2)$$

$$\text{Alors } A = H^*(M) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\eta.$$

- dans $\mathbf{G}_A(2)$: $(1 \otimes \eta) \omega_{12} = (\eta \otimes 1) \omega_{12}$.
- dans $\text{Conf}_3(\mathbb{R}^2)$ (Arnold) : $(1 \otimes \eta) \omega_{12} = (\eta \otimes 1) \omega_{12} \pm (\eta \otimes \eta)$.

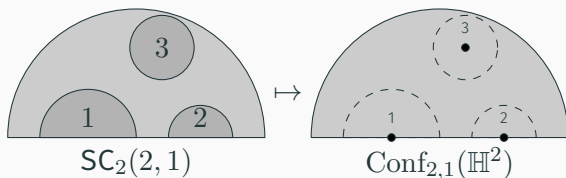
\implies on définit un « modèle perturbé » $\tilde{\mathbf{G}}_A(k)$

Proposition

Isomorphisme de dg-modules $\mathbf{G}_A(k) \cong \tilde{\mathbf{G}}_A(k)$

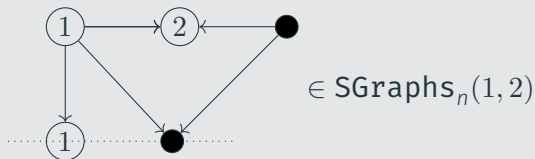
Swiss-Cheese & graphs

M ressemble (localement) à $\mathbb{H}^n \implies$ opérade Swiss-Cheese



Théorème (Willwacher 2015)

Modèle $SGraphs_n$ de $SFM_n = \overline{Conf_{\bullet, \bullet}(\mathbb{H}^n)} \simeq SC_n$:



Théorème pour les variétés à bord

Avec des techniques similaires :

Théorème

M : variété lisse, compacte, de dimension ≥ 7 , M et ∂M simplement connexes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\mathbf{G}}_A & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_R^{Z_\varepsilon} & \dashrightarrow^{\sim} & \Omega_{PA}^*(\mathbf{SFM}_M(\emptyset, -)) \\
 \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft^\dagger \\
 H^*(\mathbf{FM}_n) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{PA}^*(\mathbf{FM}_n)
 \end{array}$$

En plus : modèle $\mathbf{SGraphs}_{R,R_\partial}^{C_M, Z_\varphi^S}(k, l)$ de $\mathbf{SFM}_M(k, l)$, compatible avec la (co)action de $\mathbf{SGraphs}_n / \mathbf{SFM}_n$

Merci de votre attention !

Ces diapos, ma thèse : <https://idrissi.eu/>