Homologie de factorisation et espaces de configuration

Najib Idrissi

14 mai 2019

1 Homologie de factorisation

1.1 Définition

Définition 1. Top : catégorie des espaces topologiques et applications continues. $\mathsf{Ch}(\mathbb{Z})$: catégorie des complexes de chaînes de $\mathbb{Z}$-modules en degrés positifs.

Théorème 2. *Soit G un groupe abélien. Il existe un unique foncteur (à équivalence homotopique près) $C : \mathsf{Top} \to \mathsf{Ch}(\mathbb{Z})$ tq 1. invariance homotopique ; 2. $C(X \sqcup Y) \simeq C(X) \oplus C(Y)$; 3. si $Z = X \cup Y$, alors $0 \to C(X \cap Y) \to C(X) \oplus C(Y) \to C(Z) \to 0$ est exacte ; 4. $C(*) \simeq G$.*

But : obtenir un théorème similaire pour des invariants de variétés, coefficients non-commutatifs, avec une catégorie monoïdale symétrique quelconque à l'arrivée.

Définition 3. Mfd_n : catégorie des variétés topologiques de dimension n et de leur plongements. Le produit monoïdal est la somme disjointe. Variantes Mfd_n^{or}, Mfd_n^{fr}...

Définition 4. Sous-catégorie pleine $\mathsf{Disk}_n^? \subset \mathsf{Mfd}_n^?$ avec pour objets les réunions disjointes finies de copies de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 5. Ce sont des catégories topologiques. Implicitement, tous les foncteurs que l'on va considérer seront continus. La catégorie cible est donc topologique ; plus précisément, ce doit être un ∞-catégorie...

Définition 6. Une **algèbre** $\mathsf{Disk}_n^?$ est un foncteur monoïdal symétrique $F : \mathsf{Disk}_n^? \to \mathsf{C}$, où C est une catégorie monoïdale symétrique.

Concrètement, on a $F(\mathbb{R}^n) = A$, $F(\bigsqcup^k \mathbb{R}^n) = A^{\otimes k}$, et des morphismes structurels pour chaque configuration de plongements de copies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (*faire un dessin*).

Exemple 7. Une algèbre Disk_1^{or} est une algèbre associative à homotopie près (*dessin*).

Proposition 8. *Soit $F : \mathsf{Mfd}_n^? \to \mathsf{C}$ un foncteur monoïdal symétrique. Alors pour $N \in \mathsf{Mfd}_{n-k}^?$, $F(N \times \mathbb{R}^k)$ est une algèbre $\mathsf{Disk}_k^?$. Si $M \in \mathsf{Mfd}_n^?$ est une variété à bord, alors $F(M)$ est un module à gauche sur $F(\partial M \times \mathbb{R})$.*

Remarque 9. En particulier, $F(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre $\mathsf{Disk}_n^?$.

Théorème 10 (Francis). *Soit A une algèbre $\mathsf{Disk}_n^?$ dans C. Alors il existe un unique foncteur (à équivalence homotopique près) $F : \mathsf{Mfd}_n^? \to \mathsf{C}$ tq 1. F est symétrique monoïdal ; 2. si $M = M' \cup_N M''$ est une décomposition de M en deux sous-variétés recollées le long de leur bord, alors $F(M) \simeq F(M') \otimes^{\mathbb{L}}_{F(N\times\mathbb{R})} F(M'')$; 3. $F(\mathbb{R}^n) \simeq A$.*

Définition 11. Soit A une algèbre $\mathsf{Disk}_n^?$ et $M \in \mathsf{Disk}_n^?$. On note $\int_M A$ l'évaluation en M du foncteur associé à A et on l'appelle **homologie de factorisation de M à coefficients dans** A.

Théorème 12. *On peut calculer $\int_M A$ comme la colimite homotopique* $\mathrm{hocolim}_{\bigsqcup^k \mathbb{R}^n \hookrightarrow M} A^{\otimes k}$.

1.2 Définition alternative

La définition comme une colimite homotopique enrichie n'est pas très pratique si on veut faire des calculs concrets.

Proposition 13. *La catégorie $\mathsf{Disk}_n^?$ définit une opérade, encore notée $\mathsf{Disk}_n^?$, par :*

$$\mathsf{Disk}_n^?(k) := \hom_{\mathsf{Disk}_n^?}(\bigsqcup^k \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Concrètement, ça veut dire qu'on peut composer les plongements entre eux. Par définition, une algèbre sur l'opérade $\mathsf{Disk}_n^?$ est une algèbre $\mathsf{Disk}_n^?$ (ça tombe bien !).

Définition 14. Soit $M \in \mathsf{Mfd}_n^?$. On définit :

$$\mathsf{Disk}_M^?(k) := \hom_{\mathsf{Mfd}_n^?}(\bigsqcup^k \mathbb{R}^n, M)$$

Proposition 15. $\mathsf{Disk}_M^?$ *définit un module à droite sur l'opérade* $\mathsf{Disk}_n^?$.

Théorème 16 (Francis). *L'homologie de factorisation $\int_M A$ peut se définir comme un "produit tensoriel dérivé" :*

$$\begin{aligned}\int_M A &\simeq \mathsf{Disk}_M^? \circ^{\mathbb{L}}_{\mathsf{Disk}_n^?} A \\ &= \mathrm{hocoeq}\big(\mathsf{Disk}_M^?(k) \otimes \mathsf{Disk}_n^?(r_1) \otimes \cdots \otimes \mathsf{Disk}_n^?(r_k) \otimes A^{r_1+\cdots+r_k} \rightrightarrows \mathsf{Disk}_M^?(k) \otimes A^{\otimes k}\big)\end{aligned}$$

Concrètement, *faire un dessin.*

Ça n'a pas l'air mieux qu'avant. Mais ça a un gros avantage : on a séparé l'information en trois données, qu'on peut calculer séparément ! Et comme c'est dérivé, on peut tout changer à homotopie près.

2 Calcul

À partir de maintenant, on se place dans les complexes de chaînes sur $\mathbb{R}$. Comme $C_*(- ; \mathbb{R})$ préserve les colimites, on a :

$$C_*(\int_M A; \mathbb{R}) \simeq C_*(\mathsf{Disk}_M^?; \mathbb{R}) \circ^{\mathbb{L}}_{C_*(\mathsf{Disk}_n^?;\mathbb{R})} C_*(A; \mathbb{R}).$$

On se place également dans le cas $? = fr$.

2.1 Espaces de configuration

Définition 17. Pour un espace X, on définit :

$$\mathrm{Conf}_k(X) := \{x \in X^k \mid \forall i \neq j,\, x_i \neq x_j\}.$$

Proposition 18. *On a des équivalences faibles :*

$$\mathsf{Disk}_n^{fr}(k) \simeq \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \qquad \mathsf{Disk}_M^{fr}(k) \simeq \mathrm{Conf}_k(M).$$

Problème : ce ne sont plus des opérades / modules opéradiques. En effet, il faudrait pouvoir mettre plusieurs points au même endroit. Il existe une manière de compactifier pour récupérer une structure d'opérade (Fulton–MacPherson, Axelrod–Singer).

2.2 Formalité de Kontsevich

Rappel : on veut calculer

$$C_*(\int_M A) = C_*(\mathsf{Disk}_M^{fr}) \circ^{\mathbb{L}}_{C_*(\mathsf{Disk}_n^{fr})} C_*(A) \simeq C_*(\mathsf{FM}_M) \circ^{\mathbb{L}}_{C_*(\mathsf{FM}_n)} \tilde{A}.$$

Théorème 19 (Tamarkin $n = 2$, Kontsevich, Lambrechts–Volic, Petersen $n = 2$, Fresse–Willwacher)**.** *L'opérade Disk_n^{fr} est formelle : $C_*(\mathsf{Disk}_n^{fr}) \simeq H_*(\mathsf{Disk}_n^{fr})$.*

Théorème 20 (Arnold, Cohen)**.** *Une algèbre sur $H_*(\mathsf{Disk}_n^{fr})$ est une n-algèbre de Poisson. On a explicitement :*

$$H^*(\mathsf{Disk}_n^{fr}(k)) = H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = S(\omega_{ij})_{1\leq i,j\leq k}/(\omega_{ij}^2, \omega_{ii}, \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij}).$$

Conséquence : dans $\int_M A$, on peut remplacer $C_*(\mathsf{Disk}_n^{fr})$ par $H_*(\mathsf{Disk}_n^{fr})$, qui a une description combinatoire très simple.

Idée de la preuve de Kontsevich. Kontsevich introduit une coopérade des graphes, Graphs_n. L'espace vectoriel $\mathsf{Graphs}_n(k)$ est engendré par des classes d'isomorphismes de graphes du type suivant : *dessin*. La différentielle contracte les arêtes adjacentes à un sommet interne (attention aux signes !). Kontsevich construit ensuite un zigzag :

$$H^*(\mathsf{Disk}_n^{fr}) \leftarrow \mathsf{Graphs}_n \rightarrow \Omega^*(\mathsf{Disk}_n^{fr}).$$

La première flèche est une projection, et est un quasi-isomorphisme par des arguments combinatoires. La deuxième flèche est définie par des intégrales – on comprend comment ça marche sur la relation $\omega_{12}\,\omega_{23} + \omega_{23}\,\omega_{31} + \omega_{31}\,\omega_{12}$. $\square$

Remarque 21. On voit dans la preuve que le théorème est plus fort : comme on a $\Omega^*(\mathsf{Disk}_n^{fr})$, la théorie de l'homotopie rationelle de Sullivan (+ travaux de Fresse) dit que l'on récupère tout le type d'homotopie réel de Disk_n^{fr}.

2.3 Modèle de Lambrechts–Stanley

But : généraliser et adapter ça pour Disk_M^{fr}.

Définition 22. Une **algèbre à dualité de Poincaré de dimension** n est une algèbre différentielle-graduée commutative A qui vérifie la dualité de Poincaré strictement au niveau des chaînes.

Conjecture 23 (Lambrechts–Stanley 2006)**.** *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe et soit $A \simeq \Omega^*(M)$ une algèbre à dualité de Poincaré. Soit Δ_A la classe diagonale de A. Alors $\Omega^*(\mathrm{Conf}_k(M))$ est quasi-isomorphe à*

$$\mathsf{G}_A(k) = \big(A^{\otimes k} \otimes H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))/(p_i^*(a)\omega_{ij} = p_j^*(a)\omega_{ij}), d\omega_{ij} = p_{ij}^*(\Delta_A)\big).$$

Théorème 24. *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe* lisse. *Alors la conjecture de Lambrechts–Stanley est vraie sur $\mathbb{R}$. De plus, si* $\dim M \geq 4$ *et que M est parallélisée, alors G_A admet une structure de comodule à droite sur $H^*(\mathsf{Disk}_n^{fr})$ et $\mathsf{G}_A \simeq \Omega^*(\mathrm{Conf}_\bullet(M)) \simeq \Omega^*(\mathsf{Disk}_M^{fr})$ préserve cette structure.*

Conséquence : dans $\int_M A$, on peut remplacer $C_*(\mathsf{Disk}_M^{fr})$ par $\mathsf{G}_A^\vee$.

Idée de la preuve du théorème. Comme Kontsevich, on définit un complexe de graphes Graphs_R où R s'insère dans un zigzag de quasi-isomorphismes $\Omega^*(M) \leftarrow R \rightarrow A$. Je montre qu'alors on a un zigzag de quasi-isomorphismes

$$\mathsf{G}_A \leftarrow \mathsf{Graphs}_R \rightarrow \Omega^*(\mathsf{Disk}_M^{fr})$$

qui préservent la structure opéradique si M est parallélisée. □

Remarque 25. La preuve repose sur l'annulation de certaines intégrales sur Disk_M^{fr} qui ne se produisent que quand $\dim M \geq 4$. Si $\dim M \leq 3$, cette preuve ne marche pas, mais les seules variétés possibles sont S^2 (classification des surfaces) et S^3 (conjecture de Poincaré / théorème de Perelman) et dans ce cas on vérifie aisément la conjecture de Lambrechts–Stanley. On n'a cependant pas la structure de module opéradique.

Exemple d'application :

Définition 26. $\mathcal{O}_{\mathrm{poly}}(T^*\mathbb{R}^d[1-n])$ est la n-algèbre de Poisson donnée par les applications polynomiales sur l'espace cotangent décalé. Concrètement,

$$\mathcal{O}_{\mathrm{poly}}(T^*\mathbb{R}^d[1-n]) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d, \xi_1, \dots, \xi_d],$$

où $\deg x_i = 0$, $\deg \xi_j = n-1$, et $\{x_i, \xi_j\} = \delta_{ij}$.

Théorème 27 (I., cf. Markarian, Döppenschmidt)**.** *Si M vérifie les hypothèses du théorème précédent, alors*

$$\int_M \mathcal{O}_{\mathrm{poly}}(T^*\mathbb{R}^d[1-n]) \simeq \mathbb{R}.$$

Interprétation physique : l'espérance d'un observable quantique sur une variété compacte sans bord est simplement un nombre.