Strasbourg 2021

mardi 19 janvier 2021

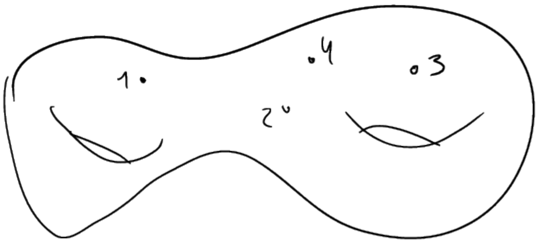
Najib Idrissi – Université de Paris & IMJ-PRG
Travail en commun avec Ricardo Campos et Thomas Willwacher

https://arxiv.org/abs/1911.12281

1) Espaces de configuration & opérades

M : variété $\quad n \geq 0$

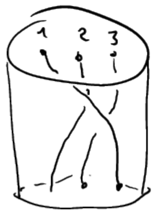
$$\mathrm{Conf}_M(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid \forall i \neq j,\ x_i \neq x_j\}$$



Applications :

· groupes de tresses B_n = gr de tresses à n brins

$= \pi_1 \mathrm{Conf}_{D^2}(n)/\Sigma_n$



Σ surface $\to B_n(\Sigma) = \pi_1 \mathrm{Conf}_\Sigma(n)/\Sigma_n$

↳ $\simeq K(\pi, 1)$

· $\mathrm{Emb}(M,N) = \{f : M \hookrightarrow N\} \longrightarrow \prod_{r \geq 0} \mathrm{Map}(\mathrm{Conf}_M(r), \mathrm{Conf}_N(r))$

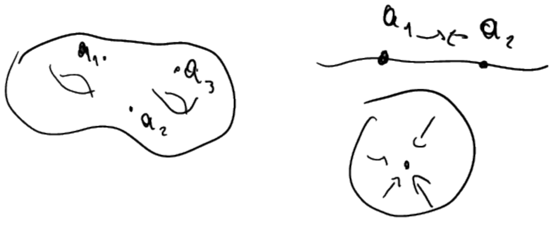
$f \longmapsto (f_r)_{r \geq 0}$

Calcul des plongements de Goodwillie-Weiss

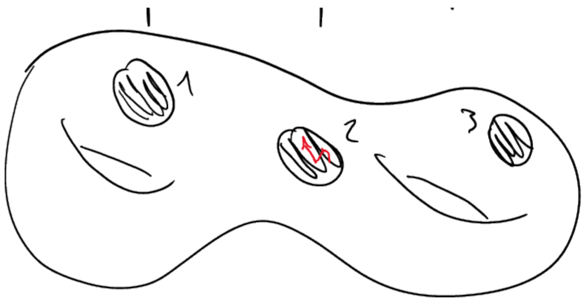
$\dim N - \dim M \geq 3 \to$ on approxime $\mathrm{Emb}(M,N)$

avec un sous-espace de $\prod_{r \geq 0} \mathrm{Map}(\mathrm{Conf}_M(r), \mathrm{Conf}_N(r))$

· $\int_M A$



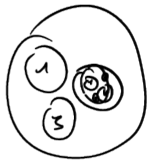
↳ on remplace les points par des disques



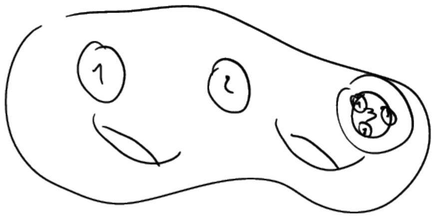
$$\begin{tikzcd} D^k_M(n) \simeq \mathrm{Conf}^k_M(n) \arrow[r] \arrow[d] & Fr^n_M \arrow[d] \\ \mathrm{Conf}_M(n) \arrow[r] & M^n \end{tikzcd}$$

Structure supplémentaire

$D^k_n = D^k_{D^n} = \{$  $\}$ opérade

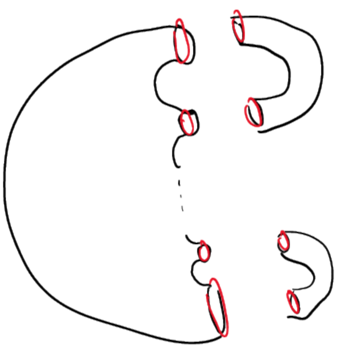


D^k_M est "un module à droite" sur D^k_n



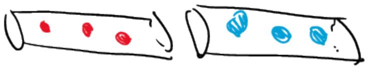
<u>Objectif</u> Calculer le type d'homotopie de $D^k_{\Sigma_g}$ $\forall g$

<u>Stratégie</u> : Découper la surface et recoller les morceaux



$$\Sigma_g = \underbrace{\left(S^2 \setminus (D^2)^{\sqcup 2g}\right)}_{S^2_{g,g}} \cup_{(S^1\times\mathbb{R})^{\sqcup 2g}} \left(S^1 \times \mathbb{R}\right)^{\sqcup g}$$

$D^k_{S^1\times\mathbb{R}}$ est une algèbre à homotopie près

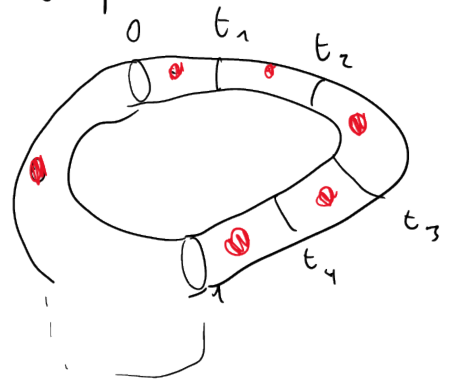


$D^k_{S^2_{g,g}}$ est un module sur cette algèbre de $2g$ manières différentes g à droite et g à gauche

$D^k_{\Sigma_g}$ = "complexe de Hochschild itéré"

$0 \quad t_1 \quad t_2$

D_{Σ_g} = compliqué à construire



$$\underbrace{D^{k}_{S^2_{g,g}}(\ldots) \times \prod_{\alpha=1}^{g} D^{k}_{S^1\times\mathbb{R}}(\ldots) \times \ldots \times D^{k}_{S^1,\mathbb{R}}(\ldots)}_{} \times S^{r}$$

<u>Rk</u> On ne regarde que le type d'homotopie rationnel

$f : X \to Y$ est une équ rationnelle si $\pi_*(f) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$

[Sullivan] $\Omega^*: \mathrm{Ho}(\mathrm{Top}_{\mathbb{Q}}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ho}(\mathrm{CDGA}^{op}) : \langle - \rangle$

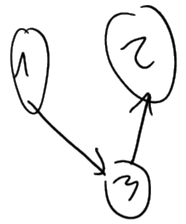
algèbres différentielles graduées commutatives

2) Formalité

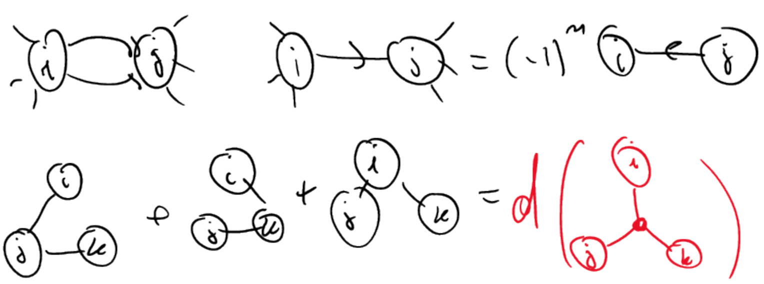
Thm [Kontsevich, Lambrechts...] D_n est formelle

$$H^*(D_n) \simeq \Omega^*(D_n)$$

[K] $H^*(D_n(r)) = S(\underset{\text{degré } n-1}{\omega_{ij}})_{1\leq i\neq j\leq r} \Big/ \begin{pmatrix} \omega_{ij}^2 = 0 \\ \omega_{ij} = (-1)^n \omega_{ji} \\ \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0 \end{pmatrix}$



$\omega_{13}\,\omega_{32}$



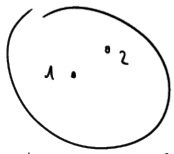
$$H^*(D_n) \xleftarrow[\text{résolution}]{\sim} \mathrm{Graphs}_n \xrightarrow[\omega]{\sim} \Omega^*_{PA}(D_n)$$

Γ $\left.\begin{array}{l}\text{à } r \text{ sommets numérotés} \\ k \text{ sommets noirs}\end{array}\right) \to A(\Gamma)$ forme sur $D_n(r+k)$

chaque arête $\longmapsto$ une forme volume de $D_n(2)$

$\longmapsto A(\Gamma) = \omega_{14}\,\omega_{24}\,\omega_{34}$ où ω_{ij} = tiré en arrière de la forme volume

$\longmapsto A(\Gamma) = \omega_{14}\,\omega_{24}\,\omega_{34}$ où ω_{ij} = tiré en arrière de la forme volume de $D_n(2) \simeq S^{n-1}$ le long de $p_{ij} : D_n(2+k) \to D_n(2)$



$\omega(\Gamma) = \int A(\Gamma)$ sur toutes les positions des points noirs

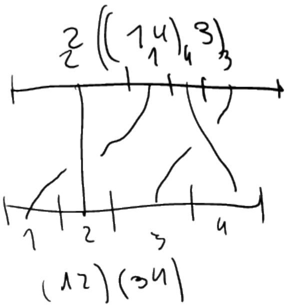
$$[T] \quad H^*(D_2) \xleftarrow{\sim} C^*_{CE}(t) \xrightarrow{\sim} \Omega^*\langle C^*_{CE}(t)\rangle \xrightarrow[\Phi]{} \Omega^*(N.PaB)$$

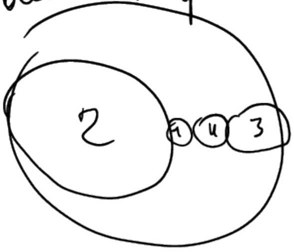
algèbre de Drinfeld-Kohno

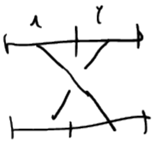
$$t(n) = \mathbb{L}(t_{ij})_{1\leq i\neq j\leq n} \Big/ \Big([t_{ij}, t_{kl}] = 0,\ [t_{ik}, t_{ij}+t_{jk}] = 0\Big) \qquad t_{ji} = t_{ij}$$

Φ est dual à $\underset{\simeq D_2}{N.PaB} \xrightarrow{\varphi} B.G\hat{U}t \xleftarrow{\sim} \langle C^*_{CE}(t)\rangle$

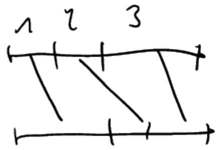
PaB : groupoïde des tresses parenthésées $\subset \pi D_2$







$\longmapsto e^{\frac{1}{2}t_{12}}$

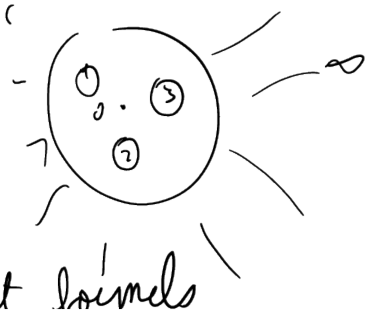


$\longmapsto \Phi(t_{12}, t_{23})$

Thm [Ševera, Giansiracusa-Salvatore] D_2^{fr} est formelle $H^*(D_2^{fr}) \simeq \Omega^*(D_2^{fr})$

$\rightsquigarrow H^*(D_2^{fr}(1)) = H^*(SO(2))$

Thm (CIW) La formalité de Ševera est compatible avec la structure cyclique



Cor $D_{1,D}^{fr}$ et D_2^{fr} sont formels cor $D^{\hbar}_{S^1\times\mathbb{R}}$ et $D^{\hbar}_{S^2_{g,g}}$ sont formels

cor $\Omega^*(D^{\hbar}_{\Sigma_g}) \simeq$ complexe de Hochschild itéré

$$\widehat{\bigotimes_{H^*(D^{\hbar}_{S^1\times\mathbb{R}})^{\otimes g}}} H^*(D^{\hbar}_{S^2_{g,1}})$$

thm [CIW] $\Omega^*(D^{\hbar}_{\Sigma_g}) \simeq G^{\hbar}_{\Sigma_g}(n)$ modèle « à la Lambrecht-Stanley » de $D^{\hbar}_{\Sigma_g}$

$$G^{\hbar}_{\Sigma_g}(n) = \frac{S(\omega_{ij})_{1\leq i\neq j\leq n} \otimes S(\theta_i)_{1\leq i\leq n} \otimes H^*(\Sigma_g)^{\otimes n}}{(\text{relations d'Arnold},\ a_i\cdot\omega_{ij} = a_j\cdot\omega_{ij}\ \forall a\in H^*(\Sigma_g))}$$

$d\omega_{ij}$ = classe diagonale de Σ_g en positions i et j

$d\theta_i$ = classe d'Euler de Σ_g

pr $G^{\hbar}_{\Sigma_g}(n) \xleftarrow[\text{combi}]{\sim} \mathrm{BVGraphs}^{\hbar}_{\Sigma_g} \xrightarrow[\omega]{\sim} \bigotimes \cdots \simeq \Omega^*(D^{\hbar}_{\Sigma_g})$

$Z : \{\text{graphes}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction de partition

GRT " $= h\mathrm{Aut}(D^{\hbar}_2)$ "

$GRT_g = h\mathrm{Aut}(D^{\hbar}_{\Sigma_g}, D^{\hbar}_2) \xrightarrow{\cup} h\mathrm{Aut}(D^{\hbar}_2) = GRT$

$D^{\hbar}_{\Sigma_g}(1)$