Raconte-moi les opérades

mercredi 9 mars 2022

Opérades

Motivation

- Groupes, présentations de groupes, représentations
- Exemple : transformations du Rubik's cube
- Mais c'est intéressant de considérer le groupe lui-même, sans forcément s'attacher à une présentation donnée, ou même à l'existence de présentations
- Pour les opérades, l'idée est la même, sauf que l'on considère des "opérations" à plusieurs entrées
- Exemples : les algèbres associatives, les algèbres commutatives, les algèbres de Lie…

Définition

- Comment passe-t-on d'une présentation de monoïde au monoïde ? On regarde tous les produits possibles
- Dans les opérades : c'est pareil, mais la combinatoire est plus compliquée (arbres)
- Exemple prototypique : opérade des endomorphismes.
- Permet de définir les algèbres sur les opérades
- Trois exemples fondateurs : Ass, Com et Lie
- Permet de s'affranchir de la présentation eg, en considérant une présentation "non-biaisée" pour Ass

Principe de reconnaissance

- Espace de lacet : $\Omega^n X = \{\gamma\colon [0,1]^n \to X \mid \gamma(\partial[0,1]^n) = \{x_0\}\}$
- Comment détecter si un espace Y a le type d'homotopie de $\Omega^n X$ pour au moins un X ?
- Opérade centrale dans la théorie : l'opérade des petits disques $\mathcal{D}_n$ (ou de manière équivalent cubes)
- On ne peut pas la décrire simplement avec des générateurs et relations !
- Elle agit sur $\Omega^n X$ pour tout X
- **Théorème** (Boardman-Vogt, May) : Si $\mathcal{D}_n$ agit sur Y (+ conditions techniques) alors $Y \simeq \Omega^n X$ pour au moins un X
  - Preuve :
  - $Y \leftarrow B(\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_n, Y) \to B(\Omega^n\Sigma^n, \mathcal{D}_n, Y) \to \Omega^n B(\Sigma^n, \mathcal{D}_n, Y)$
  - $B(-,-,-)$ est la résolution bar, classique en algèbre
  - $\mathcal{D}_n(Z) \to \Omega^n\Sigma^n Z$ est défini par (où $c_i\colon D^n \to D^n$, $z_i \in Z$)
    $$(c_1, z_1, \dots, c_r, z_r) \mapsto \left[\begin{array}{l} \gamma\colon [0,1]^n \to \Sigma^n Z \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} *, & \text{si } t \notin \bigcup_i c_i\,; \\ (z_i, s), & \text{si } t = c_i(s). \end{cases} \end{array}\right]$$
  - Condition technique sur Y (ex. connexe par arcs) implique que la deuxième application est une équivalence
- **Exemple** : Soit $\mathcal{K}_{d,n}$ l'espace des longs noeuds : on peut concaténer → délaçage !
- Structure supplémentaire sur $H_*(\Omega^n X)$: d'après Cohen, $H_*(\mathcal{D}_n)$ est l'opérade qui encode les n-algèbres de Poisson

Conjecture de Deligne, quantification par déformation

Cohomologie de Hochschild

- Soit A un anneau associatif → cochaînes de Hochschild :
  - $C^*(A,A) \coloneqq \{\hom(A^{\otimes r}, A), \partial\}_{r\geq 0}$
  - $(\partial f)(a_1, \dots, a_{r+1})$
    $$\coloneqq a_1 \cdot f(a_2, \dots, a_{r+1}) + \sum_i (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{r+1}) + (-1)^{r+1} f(a_1, \dots, a_r) \cdot a_{r+1}$$
- En bas degré :
  - $f \in C^0(A,A) = \hom(\mathbb{Z}, A)$ correspond à un élément $x \in A$, la condition $(\partial f)(a) = 0 = xa - ax$ dit que $H^0(A,A) = Z(A)$
  - $f \in C^1(A,A) = \hom(A,A)$, $(\partial f)(a,b) = 0 \Leftrightarrow f$ est une dérivation, on quotiente par les dérivations internes

Conjecture de Deligne

- Hochschild (1945) a remarqué qu'il y avait un produit associatif sur $C^*(A,A)$ donné par : $(f \smile g)(a_1,\dots,a_{r+s}) \coloneqq f(a_1,\dots,a_r)\cdot g(a_{r+1},\dots,a_{r+s})$ commutatif pour $r=0$ mais pas après
- Gerstenhaber (1963) a montré que ce produit est commutatif à homotopie près, l'homotopie étant une somme d'opérations
  $\circ_k : C^r(A,A)\otimes C^s(A,A)\to C^{r+s-1}(A,A),\ f\circ g \coloneqq \sum \pm f\circ_k g$
  On a $\partial(f\circ g) = f\smile g \mp g\smile f$, et $[f,g]\coloneqq f\circ g\mp g\circ f$ définit un crochet de Lie sur $H^*(A,A)$
- Deligne a conjecturé que $C^*(A,A)$ avait une action de l'opérade $\mathcal{D}_2$
- Démontré par Kontsevich-Soibelman, McClure-Smith (puis d'autres) en utilisant des techniques opéradiques

Quantification par déformation

- Variété de Poisson M : crochet de Poisson sur $C^\infty(M)$
- Exemple : si (M,ω) est une variété symplectique, alors $\{f,g\}\coloneqq\omega\left(X_f,X_g\right)$ définit une structure de Poisson où X_f est l'unique champ de vecteurs vérifiant $df=\omega\left(X_f,-\right)$
- Un $\star$-produit sur M est un produit associatif sur $C^\infty(M)[[\hbar]]$ tel que $f\star g = fg + O(\hbar)$
- Dans ce cas, $[f,g]_\star \coloneqq \frac{1}{\hbar}(f\star g - g\star f) \bmod \hbar$ définit un crochet de Poisson
- Question venant de la physique : peut-on toujours trouver un tel $\star$?
- Réponse : oui ! [Kontsevich, Tamarkin…] Idée :
  - Utiliser la formalité de $\mathcal{D}_2$;
  - La réponse à la conjecture de Deligne;
  - Réécrire le problème avec la théorie de l'obstruction;
  - En utilisant la formalité, montrer qu'il n'y a pas d'obstruction.

Homologie de factorisation & espaces de plongements

- Soit M,N deux variétés -> $\mathrm{Emb}(M,N)\coloneqq\{f: M\to N \mid f \text{ est un plongement}\}$
- En général très compliqué : $\pi_0\mathrm{Emb}(M,N)$ = théorie des nœuds !
- On veut approximer $\mathrm{Emb}(M,N)$ par un espace plus simple à calculer
- $\mathrm{Conf}_M(r)\coloneqq\left\{(x_1,\dots,x_r)\in M^r \mid \forall i\neq j, x_i\neq x_j\right\}$
- $\mathrm{Emb}(M,N)\subset \mathrm{Map}_\Sigma(\mathrm{Conf}_M,\mathrm{Conf}_N)$ by $f\mapsto (f_r)$ où $f_r(x_1,\dots,x_r)\coloneqq\left(f(x_1),\dots,f(x_2)\right)$. Propriétés à garder:
  - Proximité dans la source = proximité dans la cible.
  - Oubli de point dans la source = oubli de point dans la cible.
- Pour traiter la structure tangente, considérez plutôt les espaces de configuration encadrés
- Nous voulons assouplir ces conditions à homotopie près → les opérades peuvent être utilisés !
- $\mathcal{D}_M^{\mathrm{fr}}(r)\coloneqq\mathrm{Emb}\left(\sqcup^r D^n, M\right)$ a le type d'homotopie de $\mathrm{Conf}_M^{\mathrm{fr}}(r)$
- C'est un module à droite sur $\mathcal{D}_n^{\mathrm{fr}}$, et un plongement $f: M\to N$ induit un *morphisme* $\mathcal{D}_M^{\mathrm{fr}}\to\mathcal{D}_N^{\mathrm{fr}}$
- **Théorème** [Goodwillie-Weiss, Arone-Turchin, Turchin, Boavida-Weiss…] $\mathrm{Emb}(M,N)\simeq\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathcal{D}_n^{\mathrm{fr}}}\left(\mathcal{D}_M^{\mathrm{fr}},\mathcal{D}_N^{\mathrm{fr}}\right)$ si $\dim M-\dim \mathrm{N}\geq 3$.