Séminaire Bourbaki du vendredi

vendredi 6 octobre 2023 09:25

Plan potentiel

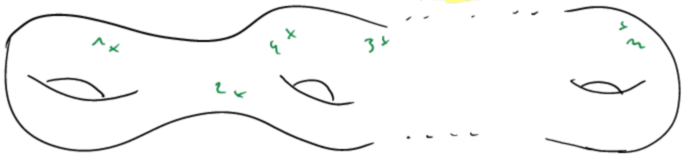
1. Espaces de modules de courbes
    a. Motivation : étude des familles de courbes
    b. Premier exemple : Grassmaniennes
    c. Définition (approximative) de $\mathcal{M}_{g,n}$
    d. Groupes de cohomologie, classes caractéristiques
    e. Anneau tautologique
2. Diagrammes de Feynman
    a. Théorie de Chern-Simons perturbative & invariants de nœuds
    b. Adaptation aux espaces de modules de courbes
    c. Cadre algébrique commun : complexes de graphes

Références

- Kontsevich, Feynman diagrams and low-dimensional topology
- Vakil, The moduli space of curves and its tautological ring
- Vakil, The moduli space of curves and Gromov-Witten theory
- Schmitt, The moduli space of curves

① Espaces de modules de courbes

Objectif : étudier les courbes complexes, c'est-à-dire les surfaces de Riemann

$S_{g,n} =$ 

g anses

Q Combien y-a-t-il de courbes possibles ? Isomorphismes entre elles ?
Combien d'isomorphismes à isotopie près ? Combien d'isotopies ??

$\Longrightarrow$ on cherche à étudier l'espace de modules

Application : famille paramétrée de courbes

une "famille paramétrée de courbes" est un fibré : $E \xrightarrow{\pi} X$ tq localement $\pi^{-1}(U) \cong U \times S_{g,n}$

ex trivial : $X \times S_{g,n}$. Est-ce qu'il y en a d'autres ?

Oui ! On peut imaginer une famille au-dessus du cercle qui fait "faire un tour" à un point marqué : 

On se convainc intuitivement que ce n'est pas une famille triviale.

Problème : comment classifier / décrire plus simplement ces familles ?

$\longrightarrow$ avec un espace classifiant tq $X \longrightarrow \dots$ ← l'espace des surfaces de type $S_{g,n}$

$x \longmapsto \pi^{-1}(\{x\}) \cong S_{g,n}$

② Grassmanienne

Exemple plus simple, "prototype"

$\Big(E \xrightarrow{\pi} X$ tq $\pi^{-1}(U) \cong \underset{\text{élément du point}}{\mathbb{C}^k} \subset \mathbb{C}^{\underset{\text{fini}}{n}}\Big)$

$(E \xrightarrow{\pi} X$ tq $\pi^{-1}(U) \simeq \underset{\text{dépend du point}}{\mathbb{C}^k} \subset \underset{\text{fini}}{\mathbb{C}^n})$

exemple encore plus basique : famille de droites dans le plan ?

↦ deux morceaux : $\{D = \{y = ax\}\}_{\mathbb{R}} \cup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \{D' = \{x = a'y\}\}$.

⟹ on trouve un cercle : $\mathbb{RP}^1$

En dimension supérieure : $Gr(k,n) = \{V \subset \mathbb{C}^n \mid \dim V = k\}$

↪ on en fait une variété en choisissant des bases et en exprimant tout dans des coordonnées homogènes

à la fin : $Gr(k,n) = U(n)/(U(k) \times U(n-k))$

$(= \underbrace{U(\mathbb{C}^n)}_{\text{agit transitivement}} / (\underbrace{U(W) \times U(W^\perp)}_{\text{stabilisateur d'un } W \text{ donné}}))$ pour $W \subset \mathbb{C}^n$ fixé

Famille universelle : $\mathcal{E} = \{(W,w) \mid W \in Gr(k,n),\ w \in W\} \xrightarrow{\pi} Gr(k,n)$
"fibré tautologique"

Étant donnée une autre famille $E \xrightarrow{\pi} X$, on obtient $X \to Gr(k,n)$
$x \mapsto \pi^{-1}(\{x\})$

et réciproquement, si $\varphi : X \to Gr(k,n)$, alors famille

$$\begin{tikzcd} E = \{(x,w) \mid x \in X,\ w \in \varphi(x)\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Gr(k,n) \end{tikzcd}$$

carré cartésien

③ Groupes de cohomologie, classes caractéristiques

Qu'est-ce qu'un gp de cohomologie ? X : espace topologique

- degré 0 : fonction continue sur X tq si x et y sont reliés par un chemin, alors $f(x) = f(y)$ (i.e $\{x,y\}$ borde un segment)
  ⟹ "invariant" des composantes connexes par arcs de X
- degré 1 : $\{ f : \text{boucles}(X) \to \mathbb{Z} \mid f(\gamma) = 0$ si γ borde un disque $\}$
  (en réalité il faut aussi définir f sur tous les chemins & imposer plein de relations
  ex $f(\circlearrowleft \circlearrowright) = f(\circlearrowleft) + f(\circlearrowright)$)
- degré n : similaire

Bilan de courses : groupes $H^n(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Si X est une variété compacte sans bord, on a la dualité de Poincaré :
$\alpha \in H^k(X)$ ⇝ compter combien de fois on coupe une sphère dimension $(n-k)$ transversalement
→ on peut intersecter ces sphères pour fabriquer $H^k \times H^l \to H^{k+l}$

Alors si $\mathcal{M}$ est un espace de module, un résultat sur $H^k(\mathcal{M})$ permet de définir des invariant de familles paramétrées

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F_{\text{universelle}} \\ \pi\downarrow & & \downarrow \\ X & \overset{\exists\varphi}{\dashrightarrow} & \mathcal{M} \\ \varphi^*\alpha & \longleftarrow & \alpha \end{array}$$

Les élément de $H^k(\mathcal{M})$ sont appelés classes caractéristiques pour les famille paramétrées

ex L_1, L_2, L_3, L_4 quatres droites génériques dans $\mathbb{C}^3$
→ combien de droites coupent les 4 ?
classe de cohomologie qui représente le lieu des droites qui coupent $L_i \Rightarrow D_i \in H^2(Gr(2,4))$
on veut calculer $D_1 D_2 D_3 D_4 \in H^8(Gr(2,4))$ ... ça fait 2 !

Permet de définir des invariants de famille paramétrées et les distinguer entre elles

4 Espaces de module de courbes

On veut maintenant classifier les fibré dont la fibre est $S_{g,n}$ → fibré de fibre S_g + n sections disjointes

→ on fabrique un "espace" $\mathcal{M}_{g,n}$

Problème : les courbes ont des automorphismes !
* on oublie le cas $(g,n) \in \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0)\}$
* le résultat ne sera pas une variété : ce sera un orbifold (ou plutôt un champ DM)

ie localement une variété mod l'action des automorphismes de la courbe (qui forme un groupe fini)

Solution On travaille en caractéristique zéro

Thm $\dim \mathcal{M}_{g,n} = 3g-3+n$, espace lisse connexe

(on voit le pb si $3g+n < 3$ ... et $(g,n)=(1,0)$ est aussi faux si on ne réfléchit pas trop) en $\mathcal{M}_{0,3}$: on peut tjrs se ramener par un unique iso à $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$\Rightarrow \mathcal{M}_{0,3} \cong *$

$\mathcal{M}_{0,4}$: le 4e pt va quelque part $\Rightarrow \mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbb{CP}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$\mathcal{M}_{1,1}$: dimension (complexe) 1 $\longrightarrow$ chaque courbe elliptique est paramétrée par son j-invariant $\mathbb{C}/\langle 1,\tau\rangle$, $j(\tau) = \frac{(12g_2)^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$, $\wp'(z) = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$

$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$

Mais attention, chaque courbe a une involution qui fixe le pt marqué $\Rightarrow$ localement $\mathbb{C}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$z_0 \in \mathbb{C}/\Lambda$

$\varphi(z) = 2z_0 - z$

(et encore pire si pas générique

II) Diagramme de Feynman

Problème : Difficile de construire des classes de cohomologie sur $\mathcal{M}_{g,n}$

① Anneau tautologique

Tout ce qu'on peut obtenir à partir de : ⚠ Il faut d'abord compactifier

- la classe fonda $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}] \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$
- $\forall \Gamma$ graphe stable, $[\overline{\mathcal{M}}^\Gamma] \in H^{2e}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$
- $\forall$ fibré en droite $\mathcal{L} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$
- cup produits, poussés en avant & tirés en arrière le long de gluing ξ_Γ, fgt π

C'est bien, mais comment en produire d'autres ? On sait par ailleurs que $H^*(\mathcal{M}_{g,n})$ est beaucoup plus gros que ça ! $\chi(\mathcal{M}_g) \gg \beta^g$

alors que $\dim H_{taut}(\mathcal{M}_g) < C^{\sqrt{g}}$ car dominé par $\mathbb{Q}[\kappa_1, \kappa_2, \dots]$ deg $\kappa_i = 2i$

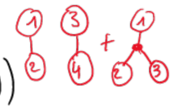
② Première construction de Kontsevich

Inspiration : théorie des nœuds et théorie de Chern-Simons

$\omega = \frac{1}{2\pi}(x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$ forme volume de $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$\omega = \frac{1}{2\pi}(x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$ forme volume de $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

L_1, L_2 courbes orientées $\Rightarrow$ entrelacement $\# = \int_{\substack{x \in L_1 \\ y \in L_2}} \omega(x-y)$

<ins>Thm</ins> $K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ invariant $\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<1} \omega(K(t_1)-K(t_3)) \wedge \omega(K(t_2)-K(t_4))$ 

$$+ \int_{\substack{0<t_1<t_2<t_3<1 \\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus K}} \omega(K(t_1)-x) \wedge \omega(K(t_2)-x) \wedge \omega(K(t_3)-x) - \frac{1}{24}$$

2^e coeff du polynôme de Conway de K

1) Algèbre A_∞

V : super espace vectoriel : $V = V_0 \oplus V_1$ (mod 2)

on note $\bar{v}$ le degré d'un élément homogène et on pose $\overline{v \otimes w} = \bar{v} + \bar{w}$

différentielle : $d : V \to V$ impaire $(d(V_0) \subset V_1,\ d(V_1) \subset V_0)$
tq $d^2 = 0$

on note $H(V) = \ker(d) / \operatorname{im}(d) = H_0(V) \oplus H_1(V)$

algèbre associative à homotopie près : $(V, m_1, m_2, \dots)$

où $m_1 : V \to V$ impaire
$m_2 : V \otimes V \to V$ paire
$m_3 : V \otimes V \otimes V \to V$ impaire

$m_n : V^{\otimes n} \to V$ parité de n

tq, $\forall x_1, \dots, x_n \in V_0 \sqcup V_1$, $\quad \pm = (-1)^{j(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1}) + (j-1)k}$

$$\sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 1 \leq k \leq i}} \pm\, m_i(x_1, \dots, x_{k-1}, m_j(x_k, \dots, x_{k+j-1}), \dots, x_n) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \sum \pm$  $= 0$

- $n = 1$: $m_1 \circ m_1 = 0 \Rightarrow$ différentielle $m_1 = d$
- $n = 2$: $d(m_2(x,y)) = m_2(dx, y) + (-1)^{\bar{x}} m_2(x, dy)$
  $\to$ relation de Leibniz
- $n = 3$: $m_2(m_2(x,y),z) - m_2(x, m_2(y,z))$
  $= d\, m_3(x,y,z) + m_3(dx,y,z) + (-1)^{\bar{x}} m_3(x, dy, z) + (-1)^{\bar{x}+\bar{y}} m_3(x, y, dz)$

$= d m_3(x,y,z) + m_3(dx,y,z) + (-1)^{\bar{x}} m_3(x,dy,z) + (-1)^{\bar{x}+\bar{y}} m_3(x,y,dz)$

$\Rightarrow$ en homologie, m_2 est associative

• $n=4$: homotopie entre les 2 manières d'aller de $((xy)z)t$ à $x(y(zt))$

$$\begin{tikzcd}
((xy)z)t \arrow[r] \arrow[d] & (xy)(zt) \arrow[r] & x(y(zt)) \\
(x(yz))t \arrow[rr] & \partial m_4 & x((yz)t) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Produit scalaire $\quad \langle -,- \rangle : V \otimes V \xrightarrow[\text{pair}]{} \mathbb{R} \quad$ dim $V < \infty$, non dégén

rq $\langle m_n(x_1 \dots x_n), x_{n+1} \rangle$ est (anti)symétrique sous l'action des cycles

ex $H^*(M)$ var compacte sans bord, $m_3 = m_4 = \dots$

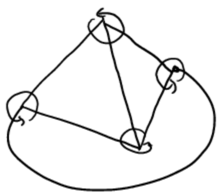
on peut aussi améliorer pour encoder les produits de Massey (ex anneau Borroméen)

② Graphes rubans - classes caractéristiques

Graphe ruban = graphe $\Gamma = (V, E)$, $E \subset \binom{V}{2}$ (pas d'arêtes doubles ni de boucle !

+ ordre total sur les sommets + ordre cyclique sur $\mathcal{I}(v)$ = arêtes incidentes à v

ex



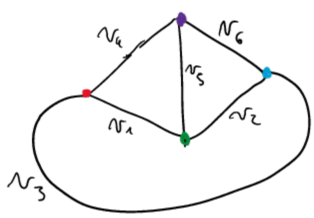
pour le squelette d'un tétraèdre

Structure d'algèbre A_∞ sur A avec produit scalaire

$$\Rightarrow \boxed{Z(\Gamma)} = \sum_{\substack{\text{choix de}\\ \text{couleurs}\\ E \to \text{base } A}} \prod_{v \in V} (\text{coeff autour de } v)$$

$$T_{a_1 \dots a_{n+1}} = \langle m_n(a_1 \dots a_n), a_{n+1} \rangle$$

ex tétraèdre :



un choix de couleurs

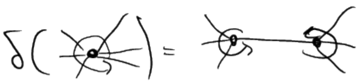
$\rightarrow \langle v_1 v_4, v_3 \rangle \langle v_2 v_5; v_1 \rangle \langle v_2 v_3, v_6 \rangle \langle v_4 v_5 v_6 \rangle$

Différentielle sur GC

Thm [K] $\sum Z(\Gamma)\Gamma$ est un cocycle

Différentielle sur GC

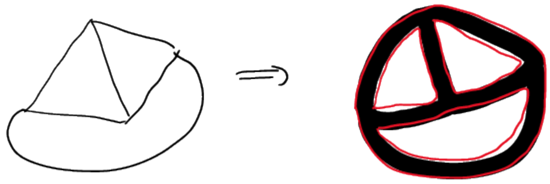
Thm [K] $\sum Z(\Gamma)\Gamma$ est un cocycle



③ Lien avec $\mathcal{M}_{g,n}$

$R_{g,n}$: espace de module des graphes ruban
+ métrique ($E \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$)
tq surf de genre g & n composante de bord

ex



$n = 4$
$g = 0$

Thm [Strebel, Penner 198?] $R_{g,n} \cong \mathcal{M}_{g,n}^{dec} \simeq \mathcal{M}_{g,n}$

où $\mathcal{M}_{g,n}$: espace de module de courbes de genre g
+ fonction $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui prend des valeurs $\neq 0$ en n points

cor Γ graphe ruban $\Rightarrow$ strate de $R_{g,n}$ des graphes de type combinatoire Γ
$\sum Z(\Gamma)\cdot\Gamma$ est une classe là-dessus

ex $V = \mathbb{C}$ en degré 1, $\langle 1, 1\rangle = 1$

$$m_k(1, \dots, 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \text{arbitraire} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la classe caractéristique est un polynôme en les classes de Morita - Miller - Mumford