Des Mathématiques - ENS Paris 4 décembre 2024

lundi 21 octobre 2024 10:53

Plan

1. Les groupes de tresses
2. Présentation d'Artin
3. Groupes (bi-)ordonnables, conjectures de Kaplansky
4. Idée de la preuve par réduction des anses
5. Questions ouvertes

① Qu'est-ce qu'une tresse ?

Tresse = brins qui se croisent en avançant toujours dans le même sens

Réductions plongées successives :

- on s'intéresse juste à la topologie : peu importe le diamètre, la couleur...
  ↳ combinatoire : qui passe au-dessus / en-dessous ?
- arc = image de $\gamma : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (pas de paramétrisation)
  tq la 1ère coord est strictement croissante on interdit les rebroussements

tresse à n brins = réunion de n arcs disjoints $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$
avec points de départ : $(0,1,0), \dots, (0,n,0)$
arrivée : $(1,\sigma(1),0) \dots (1,\sigma(n),0)$

- quitte à reparamétrer, on peut supposer que $\beta_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$
  $t \mapsto (t, y_i(t), z_i(t))$

$y_i(0) = i$, $z_i(0) = 0$
$y_i(1) = \sigma(i)$, $z_i(1) = 0$ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ + pas de croisement

- deux tresses sont "les mêmes" quand on peut déformer l'une en l'autre :

isotopie : $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^n$
$\beta \sim \beta'$ $(s, t) \longmapsto (H_1(s,t), \dots, H_n(s,t))$

tq
- $\forall s$, $t \mapsto H(s,t)$ est une tresse
- $H(0,t) = \beta(t)$
- $H(1,t) = \beta'(t)$

Rq Par continuité $H(s,0) = ((0,1,0) \dots (0,n,0))$
$H(s,1) = ((1,\sigma(1),0), \dots, (1,\sigma(n),0))$
toujours le même $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

on note $B_n = \{\text{tresses géom}\}/\sim$

Th $\beta \sim \beta' \iff \exists \mathcal{H} : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to [0,1] \times \mathbb{R}^2$ trivial au bord tq $\mathcal{H}(\mathrm{im}\,\beta) = \mathcal{H}(\mathrm{im}\,\beta')$
isotopie globale

ex $B_1 = \{\varepsilon_1\}$ $\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, 1, 0)$

preuve : $\forall \beta$, $H(s,t) = (1-s)\beta(t) + s \cdot \varepsilon_1(t)$

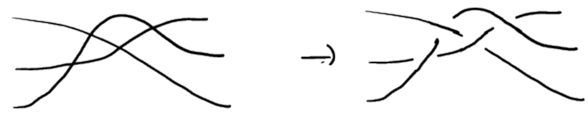
prop Rajouter un brin induit une inclusion $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$

Présentation d'Artin

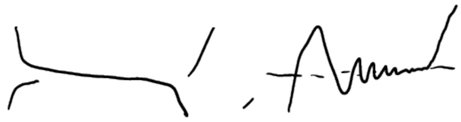
Projection d'une tresse : $pr : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1] \times \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longmapsto (x,y)$

Projection d'une tresse : pr : [0,1] × ... → ...
$(x,y,z) \mapsto (x,y)$

- donnée de $pr(\mathrm{im}\,\beta)$
- là où deux brins se croisent, donnée de qui est au-dessus ou en-dessous

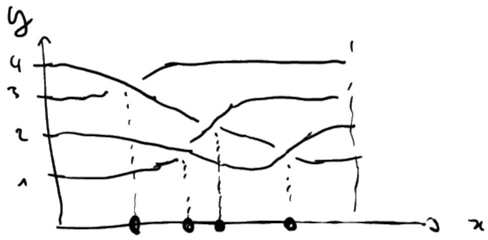
ex : 

Problème possibles :

- points triples ou plus 
- points doubles non isolé : 
- point doubles non transverse

prop
- toute tresse est isotope à une tresse régulière : la projection n'a qu'un nombre fini de point multiples, qui sont tous des points doubles transverses, d'abscisses $\neq$
- deux tresses régulières sont isotope $\Leftrightarrow$ elle sont isotope via une isotopie qui ne passe que par des tresses régulières, sauf en un # fini de points où la tresse est semi-régulière (= nb fini de pts multiples, tous doubles ou triples, abscisses $\neq$ sauf les pts doubles transverses)

On peut donc coder la tresse par un mot de tresse en notant la succession des points doubles avec "signe".

ex 

$\overline{\sigma_3}\ \overline{\sigma_1}\ \sigma_2\ \sigma_1$ } mot de tresse

lemme $\{\text{mots de tresse à } n \text{ brins}\} \twoheadrightarrow B_n$

Q Quand est-ce que deux mots de tresses codent la même tresse ?

Problème difficile !

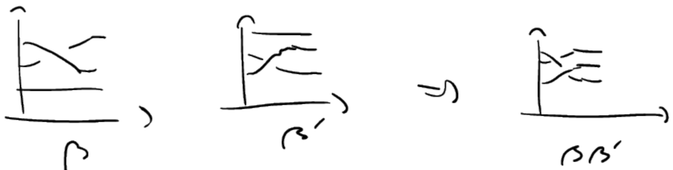
L'existence d'une structure de groupe aide à résoudre le problème

... $\beta(2t)$, si $t \leq \frac{1}{2}$

L'existence d'une structure de groupe aide à résoudre le problème

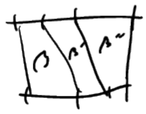
$\beta, \beta' \in B_n \rightarrow \beta\beta'(t)_i = \begin{cases} \beta(2t)_i & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta'(2t-1)_j & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ où $j = \sigma(i)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la perm de β

ex

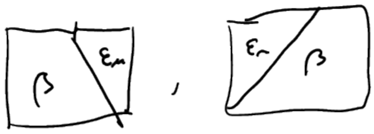


prop Définit une loi de groupe sur B_n

Associativité :



Unité :



Engendré par les σ_i et $\overline{\sigma_i}$ comme monoïde

et $\sigma_i \overline{\sigma_i} = \varepsilon_n = \overline{\sigma_i} \sigma_i$ → toute tresse a un inverse

ex $B_1 = 1$ groupe trivial

ex $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ morphisme de groupes

ex $B_2 \cong \mathbb{Z}$

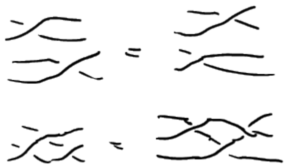
ex $B_n \twoheadrightarrow B_{n-1}$ oubli d'un brin

prop morphisme de groupe surjectif $B_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$

Le groupe est engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Relations ?

lemme Si $|i-j| \geq 2$, alors $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$

Et $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$



Th (Artin) Ce sont les seules relations. $B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ \forall |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right\rangle$

raisonnement sur les tresses régulières & les points triples

$\Rightarrow$ on a réduit le problème à de la combinatoire

Rq $\mathfrak{S}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},\ \sigma_i^2 = 1 \rangle$

$\sigma_i = (i, i+1)$ transposition

⚠ Pas facile de travailler avec une présentation !

Problème du mot : quand est-ce que deux mots sont $\sim$, sachant que les seules rel possibles sont celle-là ?

↳ problème indécidable en général

↳ pour les tresses, on sait faire !

③ Groupes ordonnés

Un groupe G est ordonnable (à gauche) s'il admet un ordre total $\leq_G$ tq $x \leq y \Rightarrow gx \leq gy$

③ Groupes ordonnés

Un groupe G est *ordonnable (à gauche)* s'il admet un ordre total $\leq_G$ tq $x \leq y \Rightarrow gx \leq gy$

ex Groupe abélien libre $\mathbb{Z}^n$: ordre lexicographique

Rq G ordonnable $\Rightarrow$ G sans torsion

Th [Levi] G abélien sans torsion $\Rightarrow$ ordonnable

ex $\langle a, b \mid a^2 b a^2 b^{-1}, b^2 a b^2 a^{-1} \rangle$ est sans torsion mais pas ordonnable

Th [Dehornoy, Fenn-Greene-Rourke-Wiest, Thurston] Le groupe B_n est ordonnable

En plus, $\exists$ algo efficace pour déterminer si un mot de tresse est $=1$, >1, <1

$\hookrightarrow$ étant donné w, w', appliquer l'algo à $w^{-1}w'$!

$\exists$ ordre invariant à gauche $\Leftrightarrow$ $\exists P \subset G$ tq $\begin{cases} \cdot\ P \cdot P \subset P \\ \cdot\ G = \{1\} \cup P \cup P^{-1} \end{cases}$ ie $\cdot\ 1 \notin P$, $\cdot\ P \cap P^{-1} = \emptyset$, $\cdot\ P \cup P^{-1} \cup \{1\} = G$

$P = \{x \in G \mid x > 1\}$, $x < y \Leftrightarrow x^{-1} y \in P$

Cor B_n est sans torsion (c'était déjà connu)

Implique également que *l'algèbre du groupe B_n* vérifie les conjectures de Kaplansky

def G groupe $\rightsquigarrow$ anneau $\mathbb{K}[G]$

éléments : familles $(a_g)_{g \in G}$ à support fini   notation : $\sum_{g \in G} a_g \cdot g$

addition terme à terme

multiplication $(a_g) \cdot (b_g) = (c_g)$ $c_g = \sum_{\substack{h, k \in G \\ h \cdot k = g}} a_h b_k = \sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1} g}$

ex $\mathbb{K}[1] = \mathbb{K}$ Rq $\mathbb{K}[G]$ est la représentation régulière de G

ex $\mathbb{K}[\mathbb{Z}] = \mathbb{K}[t, t^{-1}]$

ex $\mathbb{K}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] = \mathbb{K}[t]/(t^n - 1)$

prop $\{$ représentations de G $\} \xleftrightarrow{\cong} \{$ modules sur l'anneau $\mathbb{K}[G] \}$

Si G est fini, alors on connaît assez bien $\mathbb{K}[G]$. Sinon, assez compliqué !

conj [Kaplansky '40s] Soit G un groupe sans torsion, alors

1) $\mathbb{K}[G]$ est intègre
2) $\mathbb{K}[G]$ ne contient pas d'idempotents non-triviaux : $x^2 = x \Rightarrow x = 1$ ou $x = 0$
3) $\mathbb{K}[G]$ ne contient pas d'inversibles non triviaux : $xy = 1 \Rightarrow x = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, $g \in G$

Rq 3) est fausse (Gardam 2021)   Rq 3) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2)

Th Si G est ordonnable, alors il vérifie les conjectures de Kaplansky

Rq 3) est fausse (Eyarado (...) ...

Th Si G est ordonnable, alors il vérifie les conjectures de Kaplansky

preuve de 1) Supposons $(\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m)(\mu_1 h_1 + \dots + \mu_m h_m) = 0$ avec g_i distincts 2 à 2, $h_1 < \dots < h_m$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \underbrace{g_i h_j}$$

Parmi les $g_i h_j$ qui apparaissent, soit $g_{i_0} h_{j_0}$ le plus petit
↳ on doit avoir $j_0 = 1$ car $g_{i_0} h_1 < g_{i_0} h_j \ \forall j$
et de plus $g_i h_1 \neq g_j h_1$ si $i \neq j$ ⇒ le terme minimal n'apparaît qu'une seule fois
⇒ on doit avoir $\lambda_{i_0} \mu_1 = 0$, donc on peut éliminer l'un d'eux et on recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus rien

Th Soit G, H des groupes, G ordonnable, et $\mathbb{Z}[G] \simeq \mathbb{Z}[H]$ alors $G \simeq H$

(Pas tjrs vrai : [Hertweck, 2001] contre-exemple d'ordre $2^{21} \cdot 97^{28}$)

1) Description de l'ordre & idée de preuve

Un mot de tresse est σ_i-positif (négatif) si :

- il ne contient pas de lettre σ_j, σ_j^{-1} avec $j < i$
- il contient σ_i (σ_i^{-1})
- il ne contient pas σ_i^{-1} (σ_i^{+1})

Il est σ-positif si σ_i-positif pour au moins un i

ex $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ est σ-positif

ex $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$ n'est ni σ-positif ni σ-negatif

Rq On peut avoir $w \sim w'$ avec w σ-positif mais pas w'

ex $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$ est σ-positif

On pose $P = \{ \beta \in B_n \mid \beta \text{ admet au moins un représentant } \sigma\text{-positif} \}$

Th P définit un ordre invariant à gauche sur B_n

Combinaison de 2 propriétés :

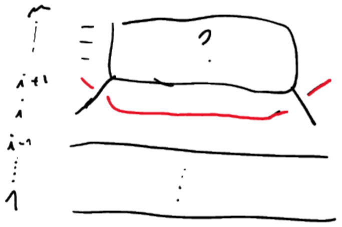
(A) Si β admet un représentant σ-positif, alors $\beta \neq 1$

(C) Tout $\beta \in B_n$ admet un représentant σ-positif, σ-négatif, ou vide

Pour démontrer (C), on peut utiliser l'algorithme de réduction des poignées

Pour démontrer (C), on peut utiliser l'algorithme de réduction des poignées

Poignée :



mot de la forme

$\sigma_i^{\pm 1} \, w \, \sigma_i^{\mp 1}$, w ne contient pas de σ_j avec $j \leq i$

Réduction de la poignée : on "pousse" la poignée à l'intérieur de la boîte

Problème : réduire une poignée ne simplifie pas nécessairement le problème

ex $w = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$

réduction :

$w' = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2$

le mot est encore plus long, et à chaque fois ça se rallonge sans diminuer les poignées

$\Rightarrow$ problème : il y a deux poignées emboîtées !

il faut commencer par celle à l'intérieur

$w'' = \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1^{-1}$

$w''' = \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

La poignée $\sigma_i^{\varepsilon} \, u \, \sigma_i^{-\varepsilon}$ est **permise** si u ne contient pas de poignée σ_{i+1}

dans ce cas, on **réduit** la poignée via

$$\sigma_i^{\pm 1} \mapsto 1$$
$$\sigma_{i+1}^{\pm 1} \mapsto \sigma_{i+1}^{-\varepsilon} \sigma_i^{\pm 1} \sigma_{i+1}^{\varepsilon}$$
$$\sigma_k^{\pm 1} \mapsto \sigma_k^{\pm 1} \text{ pour } k > i+1$$

Rq Une poignée est tjrs de la forme

$\sigma_i^{\varepsilon} \, w_0 \, \sigma_{i+1}^{d_0} \, w_1 \, \sigma_{i+1}^{d_1} \cdots \sigma_{i+1}^{d_k} \, w_k \, \sigma_i^{-\varepsilon}$, $d_i = \pm 1$, w_i n'a que des lettres σ_k avec $k \geq i+2$

la poignée est permise si $d_0 = d_1 = \cdots = d_k$

[illegible] $\sigma_{i+1} \, w_k \, \sigma_1$ [illegible], w_i [illegible] σ_k avec $k \geq i+2$

la poignée est permise si $d_0 = d_1 = \dots = d_k$

lemme la réduction ne change pas la classe d'isotopie

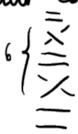
lemme Si un mot ne contient pas de poignée, alors il est σ-pos, σ-neg, ou vide

prop toute suite de réduction de poignée converge

on peut même borner le nombre d'étapes :

la largeur d'un mot w est l'entier k tq la différence entre le plus petit indice et le plus gros indice qui apparaît est $k-2$

ex largeur$(\sigma_3 \sigma_7^{-1}) = 6$



prop toute suite de réductions permises d'un mot w de largeur k et longueur l s'arrête en au plus $2^{k^4 l}$ étapes