

① Introduction

M : esp top, souvent une variété $\rightarrow \text{Conf}_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\} \subset M^n$ ouvert
 $\text{UConf}_n(M) = \text{Conf}_n(M) / \Sigma_n$

Variante: $\text{Conf}_n^{\leq k}(M) = \{x \in M^n \mid \forall A \subset \{1, \dots, n\}, |A|=k \Rightarrow \exists i \neq j \in A \text{ tq } x_i \neq x_j\}$

$\text{Conf}_\Gamma(M) = \{x \in M^{|\Gamma|} \mid i, j \in E_\Gamma \Rightarrow x_i \neq x_j\}$ $\text{Emb}(M \times_n N)$
Disques de taille n

Au-delà des variétés: si M est un graphe, très différent des 1-variétés



Objectif Comprendre la topologie de $\text{Conf}(M)$ pour mieux comprendre la géométrie de M

② Topologie - Homotopie

$f, g: X \rightarrow Y$ $f \simeq g$ si $\exists H: X \times I \rightarrow Y$ tq $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$

$X \simeq Y$ si $\exists X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$, $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$

Comment détecter si $X \simeq Y$ ou pas? à l'aide d'invariants algébriques

$\pi_1(X)$: loops dans X à homotopie pointée près $\Rightarrow$ groupe (non abélien en général)

$H_i(X; K)$: plus compliqué à définir, dimension supérieure, espaces vectoriels (ou modules)

$\hookrightarrow$ permet de "décrire" le type d'homotopie:

$f: X \rightarrow Y$ est une K -équivalence si $H_i(f; K)$ est une équivalence

③ Groupes de tresses (1/3)

Cas "de base": $M = \mathbb{R}^n$. Si $n=2$, tout est déterminé par π_1

Thm (Artin) $\pi_1(\text{UConf}_n(\mathbb{R}^2)) \cong B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, i \neq j \rangle$
 $\pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)) \cong PB_n = \ker(B_n \rightarrow \Sigma_n)$

Idee: $\in \pi_1(\text{UConf}_3(\mathbb{R}^2))$ Facile: $B_n \xrightarrow{\cong} \pi_1(\text{UConf}_n(\mathbb{R}^2))$

Deux: iso $\rightarrow$ injectif: pas d'autres relations
 $\rightarrow$ surjectif: toutes les tresses se mettent en position std à isotopie près

Outil crucial: $\text{Conf}_n(M) \rightarrow \text{Conf}_{n-1}(M)$ est un "fibré" de fibre $M \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$

③ Motivation - Invariance homotopique

Q à 1M€: si $M \simeq M'$, est-ce que $\text{Conf}_n(M) \simeq \text{Conf}_n(M')$?

- complètement faux en général: $\mathbb{R}^0 \simeq \mathbb{R}^2$, $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^0) = \emptyset \neq \text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)$
- on se restreint aux variétés compactes sans bord
→ bcp d'exemples: même homologie, même groupes d'homotopie, même type d'homotopie etc
- Longoni-Salvatore 2006: $L_{7,1} \simeq L_{7,2}$ mais $\text{Conf}_n(L_{7,1}) \neq \text{Conf}_n(L_{7,2})$
- conjecture: si $M \simeq M'$ compactes sans bord simplement connexes, alors $\text{Conf}_n(M) \simeq \text{Conf}_n(M')$

Dans le cas non simplement connexe: on espère "lire" des infos sur le type d'homies de M à partir du type d'homotopie de $\text{Conf}_n(M)$

↳ cf théorie de Chern-Simons, constructions en th des nœuds...

④ Groupes de tresses (2/3)

À quoi ressemble la (co)homologie de $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)$, $U\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)$?

Application: planification de trajets

complément topologique de X : voir $PX = \{\gamma: [0,1] \rightarrow X\} \xrightarrow{\pi} X \times X$
 $\gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))$
 $TC(X) = \min \{k \mid \exists (U_1, \dots, U_k) \text{ recouvrement ouvert de } X \times X \text{ tq } \exists s_i: U_i \rightarrow PX \text{ section de } \pi\}$
nombre de "domaine de continuité" pour un pb de planification de trajets

- $TC(X) = 1 \iff X$ est contractile
- $TC(S^m) = \begin{cases} 2 & \text{si } m \text{ est impair} \\ 3 & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases} \simeq S^1$, ~~arc~~ géodésique sur $\{(x,y) \mid x \neq y\}$ same for S^m
new $\oplus$ sur $\{(x,y) \mid x \neq y\}$
- $TC(\Sigma_g) = \begin{cases} 3 & \text{if } g \leq 1 \\ 5 & \text{if } g \geq 2 \end{cases}$ can be adapted to S^m by choosing a non-zero $\mathbb{Z}/2$ field

Thm (Earle) $TC(X) \leq \frac{2 \dim X - 1}{n+1}$ où X est n -connexe

Thm (Earle) $TC(X) > \text{zero-divisor-cup-length} = \text{length of longest non-trivial prod in the ideal of zero divisors} = \text{len}(H^*(X)^{\otimes 2} \rightarrow H^*(X))$

ex $X = S^m$, $u \in H^m(S^m) \Rightarrow a = 1 \otimes u - u \otimes 1$ is a zero divisor: $\mu(a) = 1 \cdot u - u \cdot 1 = 0$

$b = u \otimes u$ is a zero divisor also
 $a^2 = ((-1)^{m-1} - 1) u \otimes u = \begin{cases} -2b \\ 0 \end{cases}$, $ab = 0$

$cat(X) \leq TC(X) \leq 2 \cdot cat(X) - 1$
 $cat(X) = \min \{k \mid \exists V_1, \dots, V_k \subset X \text{ open nonempty } \forall i: V_i \rightarrow X \text{ null-homotopic}\}$

S^m for m even: $U_1 = \{(x,y) \mid x \neq -y\}$ geodesic
choose $y_0 \in S^m$, $\mathbb{Z}/2$ field non-zero except at $B_0 \Rightarrow U_2 = \{(x,y) \mid x \neq y_0\}$

choose $y_1 \in S^m, \{y_0, -y_0\} \rightarrow U_3 = (S^m, \{y_1\})^2$, $S^m, \{y_1\} \simeq \mathbb{R}^m \rightarrow \exists$ motion planning

Thm (Grant-Earle) $TC(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^m)) = \begin{cases} 2m-1 & \text{if } m \text{ is odd} \\ 2m-2 & \text{if } m \text{ is even} \end{cases}$ ($m=2$ ou impair $\Rightarrow$ Earle-Yuzvinski)

Autre motivation: Ginzburg-Landau model for superconductivity, minimise $U_\varepsilon: \Omega \rightarrow S^1$ develop vortices as $\varepsilon \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ for a map of degree d , exactly d vortices. Renormalised energy: $W: \text{Conf}_d(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ cat $X \neq \emptyset$ cat pts
 $H_1^* \neq 0 \Rightarrow \exists$ critical points for W . Braid $\rightarrow$ dynamics of vortices or bubbles / reasons for non-constant
High TC / cat $\rightarrow$ a lot of minimal surfaces! TC is a lower bound on the # of regimes / modes

$$\dim H_d(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^2); \mathbb{F}_2)$$

$\downarrow \times x_0$ finir par être un iso

$k \backslash d$	0	1	2	3	4	5
0	(1) _{x_0}	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	1	(1) _{x_1}	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
4	1	1	(1) _{x_1}	1 _{x_2}	0	0
5	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	(2) _{x_1}	1 _{x_3}	0
7	1	1	1	2	1	0
8	1	1	1	2	(2) _{x_4}	1 _{$x_1^2 x_2$}
9	1	1	1	2	2	1
10	1	1	1	2	2	(2) _{x_1^5}

④ Groupes de tresse (3/3)

Donc, $H^*(\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2))$ & $H^*(U\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2))$?
 • $H^*(\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2))$: "facile", pas de torsion, tout se passe bien; bases explicites etc
 $H_*(\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2))$ se décrit à l'aide de "système planétaire" (Cohen) $\vee \vee \dots \vee$
 modulo des relations

$H^*(\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2)) \cong \wedge (w_{ij})_{1 \leq i < j \leq m} / \left(\begin{matrix} w_{ij} = w_{ji}, \\ w_{ij} w_{jk} + w_{jk} w_{ki} + w_{ki} w_{ij} \end{matrix} \right)$ (Arnold) (algèbre tri symplectique, bar-PBW)
 outil clé: fibration $\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Conf}_{m-1}(\mathbb{R}^2)$

• $H_*(\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2); \mathbb{R}) \rightarrow$ dépend de la caractéristique Rq p-torsion: symétries that "pure energy" methods might miss
 - si $\text{car}(K)=0$, tout va bien car Σ_m est fini $\Rightarrow H^*(U\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2)) = H^*(\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2))^{\Sigma_m}$
 polynômes invariants sous l'action de Σ_m

- si $\text{car}(K)=p$, beaucoup plus compliqué: $p \mid |\Sigma_m|$ pour $m \geq p$
 $\Rightarrow$ "mélange" de $H^*(\text{Conf}_m(\mathbb{R}^2))$ et $H^*(\Sigma_m) (= H^*(U\text{Conf}_m(\mathbb{R}^\infty)))$

Plus facile de décrire la structure "complète": tous les Conf_m en un temps

Thm (Fukaya 1970) $\bigoplus_{d, k} H_d(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^2); \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x_0, x_1, \dots]$ | Multiplication = "concaténation"
 $k = \dim, k(x_i) = 2^i \quad d = \deg, d(x_i) = 2^i - 1$

 $\Delta(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \sum x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \dots \otimes x_{i_k}$
 $\rightarrow$ cup product

géométriquement, construit à partir de "cellules" de la forme
 $e(m_1, \dots, m_k) = \{(z_1, \dots, z_m) \in \text{Conf}_m(\mathbb{R}^2) \mid \exists k \text{ droite } z_i \text{ distincte } k_i m_i \text{ point sont sur la } i\text{ème droite}\}$
 ($\Rightarrow$ il faut que m_i soit une puissance de 2 pour avoir une classe d'homologie)

Thm (Vainstein 1978) $\bigoplus_{d, k} H_k(U\text{Conf}_k(\mathbb{R}^2); \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[h, y_1, \dots] \oplus \wedge(x_0, x_1, \dots)$
 $\cong \text{Ext}_{\Lambda(x) \otimes \Gamma(y)}^*(\mathbb{F}, \mathbb{F})$
 $\dim h = 1, \deg h = 0$
 $\dim y_i = 2p^i, \deg y_i = 2p^i - 1$
 $\dim x_i = 2p^i, \deg x_i = 2p^i - 1$

On remarque un phénomène: quand k augmente, $H_d(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^2); \mathbb{F})$ finit par se stabiliser (Arnold 1970) $\rightarrow$ Stabilité homologique

Valable pour M ouverte (McDuff, Segal 1975) et fermée (Church 2012) sur $\mathbb{Q}$

Rq Faux sur $\mathbb{Z}$ pour M fermée: $H_d(\text{Conf}_k(S^1)) = \mathbb{Z}/(2m-2)\mathbb{Z}$

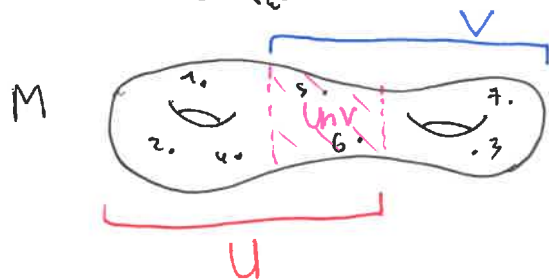
Rq Si on prend Conf , pas du tout de stabilité, mais "stabilité en représentation" (Church, Earle, Ellenberg...)

Rq Variants pour $\text{Emb}(M \times \mathbb{R}, N)$, "disques durs" etc

Rq High

⑤ Local to global

On connaît $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$, Comment en déduire $\text{Conf}_k(M)$ pour une variété M ?



Relation complexe!
 $\sqcup_{i+j=k} \text{Conf}_i(U) \times \text{Conf}_j(V)$ apparaît plus ou moins,
 mais il faut faire des identifications:
 si certains points sont dans $U \cap V$, on peut les
 faire passer d'un côté ou de l'autre

→ difficile à mettre en place!

Cas favorable: $U \cap V \cong A \times \mathbb{R}$; voisinage tubulaire de $\partial M' = \partial M''$ dans $M = M' \cup M''$, p.ex

Alors $\{\text{Conf}_k(A \times \mathbb{R})\}_{k \geq 0}$ est un monoïde à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} \times \times \times \\ \times \times \times \end{array}} & \cdot & \boxed{\begin{array}{c} \times \times \times \\ \times \times \times \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \end{array}} \\ \in \text{Conf}_3(S^1 \times \mathbb{R}) & & \in \text{Conf}_5(S^1 \times \mathbb{R}) \end{array}$$

+ compatibilité avec action de Σ

$\{\text{Conf}_k(U)\}$ est un module sur ce monoïde:

$\{\text{Conf}_k(V)\}$ aussi.

$$\boxed{\begin{array}{c} \times \times \times \\ \times \times \times \end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{c} \times \times \times \\ \times \times \times \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \end{array}}$$

on a envie de faire un "produit tensoriel". Pb: pas strictement associatif!

Solution: utiliser des opérades! On a plus d'opérations + topologie sur les opérations

Et si l'interaction est plus compliquée, alors on a accès à des opérades plus sophistiquées