Examen

Durée : 3 heures. Les notes de cours sont autorisées. Le matériel électronique est interdit.

Exercice 1 Soit C une catégorie de modèles. Considérons un cube commutatif comme à droite.

Supposons que la face (A, B, C, D) du fond et la face (A', B', C', D') de l'avant sont des pushouts ($D = B \cup_A C$ et $D' = B' \cup_{A'} C'$). Soit $h : C \cup_A A' \to C'$ le morphisme induit par la face de gauche. Montrer que si f et h sont des cofibrations, alors g aussi.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & B \arrow[dr, "f"] \arrow[dd] & \\
& A' \arrow[rr] \arrow[dd] & & B' \arrow[dd] \\
C \arrow[rr] \arrow[dr] & & D \arrow[dr, "g"] & \\
& C' \arrow[rr] & & D'
\end{tikzcd}$$

Solution : Il suffit de montrer que g a la LLP par rapport aux fibrations acycliques. Soit un carré commutatif où p est une fibration acyclique :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, two heads, "p"', "\sim"] \\
D' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

On peut considérer le diagramme élargi en rajoutant la face de droite du cube :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, two heads, "p"', "\sim"] \\
B' \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & D' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Comme f est une cofibration, il existe un relèvement $l : B' \to X$ qui fait commuter les deux triangles pertinents. On peut composer l avec le morphisme $A' \to B'$ pour obtenir un morphisme $l' : A' \to X$ qui fait commuter les deux triangles similaires.

Par ailleurs, on peut définir un morphisme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
C \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & C \cup_A A' \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \arrow[dr, dashed, "s"] & \\
& D \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Comme $h : C \cup_A C' \to C'$ est une cofibration, on peut trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd}
C \cup_A C' \arrow[rr, "s"] \arrow[d, hook, "h"] & & X \arrow[d, two heads, "p"', "\sim"] \\
C' \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "t"] & D' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

En combinant $t : C' \to X$ avec $g : B' \to X$, on obtient un morphisme $D' = B' \cup_{A'} C' \to X$ qui est le relèvement voulu.

Exercice 2 Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ deux adjoints de Quillen à gauche. Montrer que $G \circ F : \mathsf{C} \to \mathsf{E}$ est un adjoint de Quillen à gauche. Construire une transformation naturelle entre les foncteurs dérivés totaux $\mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F \Rightarrow \mathbb{L}(G \circ F)$ et montrer que c'est un isomorphisme. (On utilisera des remplacements cofibrants fonctoriels.)

Solution : On rappelle qu'un foncteur est un adjoint de Quillen à gauche si et seulement si il préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques. Comme F et G les préservent, $G \circ F$ aussi.

Définissons une transformation naturelle $\alpha : \mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F \Rightarrow \mathbb{L}(G \circ F)$. Soit $\emptyset \hookrightarrow Q(X) \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_X} X$ le remplacement cofibrant fonctoriel dans C. On rappelle qu'on peut calculer $\mathbb{L}F(X)$ en considérant un remplacement cofibrant $Q(X)$ de X ; on obtient $\mathbb{L}F(X) = F(Q(X))$. Par abus de notation, on note aussi $Q(-)$ le remplacement cofibrant dans D. On a alors :

$$\mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F(X) = G(Q(F(Q(X)))), \quad \mathbb{L}(G \circ F)(X) = G(F(Q(X))).$$

On définit $\alpha_X : \mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F(X) \to \mathbb{L}(G \circ F)(X)$ par :

$$\alpha_X := G(\varepsilon_{F(Q(X))}) : G(Q(F(Q(X)))) \to G(F(Q(X))).$$

Cette transformation est naturelle sur C. Comme $\mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F$ et $\mathbb{L}(G \circ F)$ préservent les équivalences faibles, la naturalité passe au quotient, et donc α est bien une transformation naturelle entre les deux foncteurs $\mathbb{L}(G \circ F), \mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{E})$.

Comme F préserve les cofibrations et les colimites, la cofibration $\emptyset \hookrightarrow Q(X)$ est envoyée sur une cofibration $F(\emptyset) = \emptyset \hookrightarrow F(Q(X))$; en d'autres termes, $F(Q(X))$ est cofibrant. Le morphisme $\varepsilon_{F(Q(X))}$ est donc une équivalence faible entre objets cofibrants. Grâce au lemme de Brown, G préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants, donc α_X est une équivalence faible, c.-à-d. un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{E})$.

Exercice 3 Soit C une catégorie de modèles et $W \in \mathsf{C}$ un objet fixé. On note $\mathsf{C}_{/W}$ la catégorie dont les objets sont les paires (Y, f) où $Y \in \mathsf{C}$ et $f : Y \to W$, et $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{/W}}((Y, f), (Z, g)) := \{h : Y \to Z \mid g \circ h = f\}$.

1. Montrer que $\mathsf{C}_{/W}$ est une catégorie de modèles, où $h : (Y, f) \to (Z, g)$ est une équivalence faible/fibration/cofibration si c'en est une dans C. Décrire ses objets fibrants et cofibrants.

Solution :

MC1 Soit $(X_i, f_i)_{i \in I}$ un diagramme indexé par une catégorie I. La propriété universelle induit une application $f : \mathrm{colim}_{i \in I} X_i \to W$, et on vérifie que $(\mathrm{colim}_{i \in I} X_i, f)$ est la colimite de (X_i, f_i) dans $\mathsf{C}_{/W}$. Pour la limite, on note I_+ la catégorie à laquelle on a rajouté un objet $\perp$ avec $\mathrm{Hom}_I(i, \perp) = *$ pour tout $i \in I$. Alors on a un diagramme $(X'_i, f'_i)_{i \in I_+}$ avec $X'_i = X_i, f'_i = f_i$ si $i \neq \perp$, et $X'_\perp = W, f_\perp = \mathrm{id}_W$. Notons $L = \lim_{i \in I_+} X'_i$; elle est munie d'une application $f : L \to X'_\perp = W$ par définition. On vérifie alors que (L, f) est la limite de (X_i, f_i) dans $\mathsf{C}_{/W}$.

MC2 Un rétract dans $\mathsf{C}_{/W}$ est en particulier un rétract dans $\mathsf{C}_{/W}$.

MC3 Découle directement de l'axiome 2 parmi 3 dans C.

MC4 Considérons un diagramme commutatif dans $\mathsf{C}_{/W}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \arrow[ddr, bend left] & \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] \arrow[drr, bend right] & Y \arrow[dr] & \\
& & W
\end{tikzcd}$$

Si i ou p est acyclique, on peut construire un relèvement en pointillés, et c'est clairement un morphisme dans $\mathsf{C}_{/W}$.

MC5 Les factorisations de C sont des factorisations dans $\mathsf{C}_{/W}$.

Un objet (X,f) est cofibrant dans $\mathsf{C}_{/W}$ si et seulement si X est cofibrant dans C. Il est fibrant si et seulement si f est une fibration.

2. Soit $\alpha : W \to W'$ un morphisme. Il induit un foncteur $\alpha_* : \mathsf{C}_{/W} \to \mathsf{C}_{/W'}$ défini sur les objets par $\alpha_*(Y,f) = (Y, \alpha\circ f)$ et sur les morphismes par $\alpha_*(h) = h$. Décrire son adjoint à droite $\alpha^* : \mathsf{C}_{/W'} \to \mathsf{C}_{/W}$.

Solution : L'adjoint à droite est donné sur les objets, pour $(X,f) \in \mathsf{C}_{W'}$ par $\alpha^*(X,f) = (X \times_{W'} W, g)$ où g est la projection $X \times_{W'} W \to W$. Sur les morphismes, pour $h : (X,f) \to (Y,g)$, on a $\alpha^*(h) = (h, \mathrm{id}_W) : X \times_{W'} W \to Y \times_{W'} W$.

3. Montrer que l'adjonction $\alpha_* \dashv \alpha^*$ est une adjonction de Quillen.

Solution : Le foncteur α_* préserve clairement les cofibrations et les cofibrations acycliques.

4. Supposons que C est propre à droite, c.-à-d. le pullback d'une équivalence faible le long d'une fibration est encore une équivalence faible. Montrer que si $\alpha : W \to W'$ est une équivalence faible, alors l'adjonction $\alpha_* \dashv \alpha^*$ est une équivalence de Quillen.

Solution : Soit $(X,f) \in \mathsf{C}_{/W}$ un objet cofibrant (donc A est cofibrant) et $(Y,g) \in \mathsf{C}_{/W'}$ un objet fibrant (donc g est une fibration). On doit montrer qu'un morphisme $h : (A, \alpha\circ f) \to (X,g)$ est une équivalence faible si et seulement si son adjoint $h^! : (A,f) \to (X \times_{W'} W, (g, \mathrm{id}_W))$ est une équivalence faible. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "f"'] & & X \arrow[ddl, "g"] \\
W \arrow[dr, "\alpha"'] & & \\
& W' &
\end{tikzcd}$$

L'adjoint $h^!$ est le morphisme induit $A \to X \times_{W'} W$ par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "h^!"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& X \times_{W'} W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, two heads, "g"] \\
& W \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & W'
\end{tikzcd}$$

Comme C est propre à droite, le tiré en arrière $X \times_{W'} W \to X$ de α est une équivalence faible. On déduit donc que $h \in \mathcal{W} \iff h^! \in \mathcal{W}$ de l'axiome 2 parmi 3.

Exercice 4 Soit R et S deux anneaux et M un (R, S)-bimodule, c.-à-d. M est un R-module à gauche et un S-module à droite qui vérifie $r \cdot (m \cdot s) = (r \cdot m) \cdot s$. On définit le foncteur $T_M : \mathsf{Ch}_{\geq 0}(S) \to \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ par $(C_i, d_i)_{i \geq 0} \mapsto (M \otimes_S C_i, \mathrm{id}_M \otimes d_i)_{i \geq 0}$ avec $r \cdot (m \otimes x) = (r \cdot m) \otimes x$.

1. Montrer que T_M est un adjoint à gauche et décrire son adjoint à droite. (Indice : penser à un Hom.)

Solution : Définissons l'adjoint à droite $H_M : \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R) \to \mathsf{Ch}_{\geq 0}(S)$. Soit $C = (C_i, d_i) \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ un complexe de chaînes. On définit un complexe de chaînes $H_M C$ par :

$$(H_M C)_i \coloneqq \mathrm{Hom}_R(M, C_i).$$

La différentielle de $f \in H_M C$ est donnée par $(df)(m) \coloneqq d(f(m))$. La structure de S-module (à gauche) sur $H_M C$ utilise la structure de S-module (à droite) de M : $(s \cdot f)(m) \coloneqq f(m \cdot s)$. On peut construire un isomorphisme :

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}_{\geq 0}(S)}(T_M C, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)}(C, H_M D)$$

en définissant $\varphi(f)(x) \in H_M D$ (pour $f : T_M C \to D$ et $x \in C$) par $\varphi(f)(x) : m \mapsto f(m \otimes x)$. L'application inverse est donnée par $\varphi^{-1}(g)(m \otimes x) = g(x)(m)$ (pour $g : C \to H_M D$, $m \in M$ et $x \in C$).

2. Montrer que l'adjonction est de Quillen si l'on utilise la structure projective de $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\cdot)$ et que M est projectif comme R-module. Est-ce vrai si M n'est pas projectif ?

Solution : Montrons que H_M préserve les fibrations et les quasi-isomorphismes (et donc les fibrations acycliques). Le fait que H_M préserve les fibrations découle du fait que si $X \to Y$ est surjectif, alors $\mathrm{Hom}_R(M, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, Y)$ est surjectif, ce qui est la définition d'être projectif. Par le lemme des cinq, il suffit de montrer que H_M envoie les suites exactes courtes sur des suites exactes courtes pour montrer qu'il préserve les quasi-isomorphismes. Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte courte, il est clair que $\mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B)$ est injective et que son image est le noyau de $\mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$. Enfin, la surjectivité de $\mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$ découle de la projectivité de M.

L'adjonction n'est pas nécessairement de Quillen en général. Il faudrait entre autres que H_M préserve les fibrations, ce qui revient à dire que M est projectif en tant que R-module (voir ci-dessus).

3. Décrire un remplacement cofibrant du complexe de chaînes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ (en degré 0).

Solution :

$$\ldots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0$$

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z}$$

4. On admet que T_M admet un foncteur dérivé total à gauche même si M n'est pas projectif. On note $\mathrm{Tor}_i^S(M,N) := H_i(\mathbb{L}T_M(N))$. Calculer $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ pour $i \in \mathbb{N}$.

Solution : On applique le foncteur T_M au remplacement cofibrant de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ trouvé à la question précédente. On trouve que $\mathbb{L}T_M(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est le complexe :

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{n\cdot} M$$

d'où l'on en déduit que $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{coker}(M \xrightarrow{n\cdot} M) \cong M/nM$, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \ker(M \xrightarrow{n\cdot} M) = \{x \in M \mid nx = 0\}$, et $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ pour $i \geq 2$.

Exercice 5 On note Cat la catégorie des catégories et on admettra qu'elle est complète et cocomplète. On dit qu'un foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est une :

- équivalence faible si c'est une équivalence de catégories ;
- cofibration si F est injectif sur les objets : $\forall c, c' \in \mathsf{C}$, $F(c) = F(c') \implies c = c'$;
- fibration si c'est une isofibration : pour tout objet $c \in \mathsf{C}$ et pour tout isomorphisme $g : F(c) \to d$, il existe un isomorphisme $f : c \to c'$ tel que $F(c') = d$ et $F(f) = g$.

Solution : Inspiré de l'article *A Model Category for Categories* de Charles Rezk.

1. Soit $[0] = \{0\}$ la catégorie ayant un unique objet 0 et un unique morphisme (id_0). Soit $\mathsf{I} = \{0 \leftrightarrows 1\}$ la catégorie ayant deux objets 0 et 1 et quatre morphismes, id_0, id_1, $f : 0 \to 1$, $g : 1 \to 0$, avec $f \circ g = \mathrm{id}_1$ et $g \circ f = \mathrm{id}_0$. Montrer qu'un foncteur est une fibration si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à $[0] \hookrightarrow \mathsf{I}$ (c.-à-d. c'est une cofibration acyclique génératrice).

Solution : C'est simplement une reformulation de la définition.

2. Démontrer les axiomes (MC2) et (MC3) pour Cat avec cette structure de modèles.

> **Solution :** La stabilité des équivalences et des cofibrations par rétracts est claire. Pour les fibrations, cela découle de la propriété précédente : une classe de morphismes définie par une propriété de relèvement est stable par rétracts. L'axiome 2 parmi 3 est également clair.

3. On considère un carré commutatif comme à droite, où I est une cofibration et P une fibration. On suppose d'abord que P est une fibration acyclique. Montrer que P est surjectif sur les objets puis construire un relèvement L.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "I"'] & \mathsf{E} \arrow[d, two heads, "P"] \\ \mathsf{D} \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "L"] & \mathsf{B} \end{tikzcd}$$

> **Solution :** Soit $b \in \mathsf{B}$ un objet. Comme P est essentiellement surjectif, il existe $e \in \mathsf{E}$ tel que $P(e) \cong b$. En utilisant le fait que P est une isofibration, on trouve un isomorphisme $e \cong e'$ t.q. $P(e') = b$.
>
> Construisons maintenant $L : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$. Comme I est injectif sur les objets et P surjectif sur les objets, on peut déjà construire le relèvement sur les objets, en posant $L(d) = c$ si $d = F(c)$ et en choisissant n'importe quel relèvement de $G(d)$ sinon. Comme P est pleinement fidèle, l'application $P : \mathrm{Hom}_{\mathsf{E}}(L(d), L(d')) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{B}}(G(d), G(d'))$ est une bijection. Pour $f : d \to d'$, on pose donc $L(f) = P^{-1}(G(f)) : L(d) \to L(d')$. On vérifie facilement que L ainsi défini est un foncteur qui fait commuter le diagramme.

4. On suppose maintenant que I est une cofibration acyclique.

   (a) Montrer qu'il existe un foncteur $R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tel que $R \circ I = \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ et un isomorphisme naturel $\alpha : I \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$ tel que pour tout $c \in \mathsf{C}$, $\alpha_{I(c)} = \mathrm{id}_{I(c)}$.

   > **Solution :** Définissons d'abord R sur les objets. Pour tout objet $d \in \mathsf{D}$, on choisit un objet $R(d) \in \mathsf{C}$ et un isomorphisme $\alpha_d : I(R(d)) \to d$ (qui existent car I est essentiellement surjectif). Si $d = I(c)$, alors on choisit $R(d) = c$ et $\alpha_d = \mathrm{id}_d = \mathrm{id}_{I(c)}$.
   > Le foncteur I est pleinement fidèle, donc
   > $$I : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(R(d), R(d')) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(I(R(d)), I(R(d')))$$
   > est une bijection pour tout $d, d' \in \mathsf{D}$. Pour $f : d \to d'$, on définit $R(f) : R(d) \to R(d')$ par $R(f) = I^{-1}(\alpha_d \circ f \circ \alpha_{d'}^{-1})$. On vérifie alors facilement que R est un foncteur, que $R \circ I = \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$, et que α définit la transformation naturelle voulue.

   (b) Pour $d \in \mathsf{D}$, trouver un objet $L(d) \in \mathsf{E}$ et un isomorphisme $\beta_d : F(R(d)) \to L(d)$ tels que $LI(c) = F(c)$, $PL(d) = G(d)$, $P(\beta_d) = G(\alpha_d)$ et $\beta_{I(c)} = \mathrm{id}_{F(c)}$.

   > **Solution :** Soit $d \in \mathsf{D}$. On a $GIR(d) = PFR(d) \in \mathsf{B}$ et un isomorphisme $G(\alpha_d) : GIR(d) = PFR(d) \to G(d)$. Comme P est une isofibration, on peut trouver un isomorphisme $\beta_d : FR(d) \to e$ tel que $P(\beta_d) = G(\alpha_d)$. On pose alors $L(d) = e$ et on a bien $PL(d) = P(e) = G(d)$. Au cas où $d = I(c)$ on choisit $e = F(c)$ et $\beta_{I(c)} = \mathrm{id}_{F(c)}$, ce qui est bien défini car I est injectif sur les objets.

   (c) Terminer de construire le foncteur L.

Solution : Pour $f : d \to d'$, on pose $L(f) = \beta_{d'} \circ FR(f) \circ \beta_d^{-1}$.

5. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur. On note $\mathbb{P}_F$ la catégorie dont les objets sont les triplets (c, α, d) où $c \in \mathsf{C}$, $d \in \mathsf{D}$ et $\alpha : F(c) \to d$ est un isomorphisme ; $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}_F}((c, \alpha, d), (c', \alpha', d')) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(c, c')$. Construire un foncteur $I : \mathsf{C} \to \mathbb{P}_F$ et montrer que c'est une cofibration acyclique. Construire également un foncteur $P : \mathbb{P}_F \to \mathsf{D}$ tel que $F = P \circ I$ et montrer que P est une fibration.

Solution : On définit I par $I(c) = (c, \mathrm{id}_{F(c)}, F(c))$ sur les objets et $I(f) = f$ sur les morphismes. Ce foncteur est clairement injectif sur les objets. Il est essentiellement surjectif : un objet (c, α, d) est isomorphe à $I(c)$ avec le morphisme $\mathrm{id}_c : (c, \alpha, d) \to (c, \mathrm{id}_{F(c)}, F(c))$. Il est de plus clairement pleinement fidèle.

Le foncteur $P : \mathbb{P}_F \to \mathsf{D}$ est défini sur les objets par $P(c, \alpha, d) = d$ et sur les morphismes, pour $f : (c, \alpha, d) \to (c', \alpha', d')$, par $P(f) = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha'$. On a clairement $F = P \circ I$. Montrons que P est une isofibration. Soit (c, α, d) un objet et $f : d \to d'$ un isomorphisme. Alors $\mathrm{id}_c : (c, \alpha, d) \to (c, f \circ \alpha, d')$ est un isomorphisme qui s'envoie sur f via P.

6. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur. En s'inspirant de la question précédente, construire un « objet cylindre » pour factoriser F sous la forme $\mathsf{C} \hookrightarrow \cdot \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}$.

Solution : On définit un « cylindre » $\mathbb{C}_F$ comme la catégorie dont les objets sont $\mathrm{ob}\,\mathsf{C} \sqcup \mathrm{ob}\,\mathsf{D}$, et on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_F}(c, c') = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(c), F(c')), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_F}(c, d) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(c), d),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_F}(d, c) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(d, F(c)), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_F}(d, d') = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(d, d').$$

Le foncteur $I : \mathsf{C} \to \mathbb{C}_F$ est donné sur les objets par $I(c) = c$ et sur les morphismes par $I(f) = F(f)$. Il est clairement injectif sur les objets donc c'est une cofibration.

Le foncteur $P : \mathbb{C}_F \to \mathsf{D}$ est donné sur les objets par $P(c) = F(c)$ et $P(d) = d$. C'est l'identité sur les morphismes. On a clairement $P \circ I = F$. Le foncteur P est essentiellement surjectif (et même surjectif sur les objets), et il est évidemment pleinement fidèle. C'est de plus une isofibration : si $x \in \mathbb{C}_F$ est un objet et $f : P(x) \to d$ est un isomorphisme, alors $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_F}(x, d)$ est encore un isomorphisme tel que $P(f) = f$.

7. Quelles catégories sont (co)fibrantes ? Quand deux foncteurs sont-ils homotopes à gauche/droite ?

Solution : La catégorie initiale est la catégorie vide $\emptyset$, et la catégorie terminale est $[0]$. Toute catégorie est donc cofibrante (le foncteur $\emptyset \hookrightarrow \mathsf{C}$ est clairement injectif sur les l'objets). Toute catégorie est également fibrante, le foncteur $\mathsf{C} \to [0]$ étant clairement une isofibration (attention au cas $\mathsf{C} = \emptyset$).

Les relations d'homotopie à gauche et à droite coïncident donc. Supposons que deux foncteurs $F, G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ sont homotopes, par exemple à gauche. Montrons qu'ils sont naturellement isomorphes. Il existe donc un cylindre $\mathsf{C} \sqcup \mathsf{C} \xrightarrow{(I_0,I_1)} \mathbb{C} \xrightarrow[\sim]{\pi} \mathsf{C}$ et un foncteur $H : \mathbb{C} \to \mathsf{D}$ tel que $H \circ I_0 = F$ et $H \circ I_1 = G$.

Soit $c \in \mathsf{C}$ un objet. Le foncteur $\pi : \mathbb{C} \to \mathsf{C}$ étant plein, il existe un morphisme $\alpha_c : I_0(c) \to I_1(c)$ tel que $\pi(\alpha_c) = \mathrm{id}_c$. De la même manière, il existe un morphisme $\beta_c : I_1(c) \to I_0(c)$ tel que $\pi(\beta_c) = \mathrm{id}_c$. En les composant, on trouve que $\pi(\beta_c\alpha_c) = \pi(\alpha_c\beta_c) = \mathrm{id}_c$. Or, on a aussi $\pi(\mathrm{id}_{I_0(c)}) = \pi(\mathrm{id}_{I_1(c)}) = \mathrm{id}_c$. Comme π est fidèle, on en déduit que $\beta_c\alpha_c = \mathrm{id}_{I_0(c)}$ et $\alpha_c\beta_c = \mathrm{id}_{I_1(c)}$, en d'autres termes α_c et β_c sont inverses l'un de l'autre.

Soit maintenant $f : c \to c'$ un morphisme. On veut vérifier que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} I_0(c) \arrow[r, "I_0(f)"] \arrow[d, "\alpha_c"] & I_0(c') \arrow[d, "\alpha_{c'}"] \\ I_1(c) \arrow[r, "I_1(f)"] & I_1(c') \end{tikzcd}$$

Or $\pi(\alpha_{c'} \circ I_0(f)) = \mathrm{id}_{c'} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_c = \pi(I_1(f) \circ \alpha_c)$, donc comme π est fidèle on trouve que le carré commute. Les deux foncteurs $I_0, I_1 : \mathsf{C} \to \mathbb{C}$ sont donc naturellement isomorphes. En composant avec H, on en déduit que F et G sont naturellement isomorphes.

Réciproquement, si l'on suppose que F et G sont naturellement isomorphes, alors on peut facilement construire une homotopie à gauche entre deux en utilisant le cylindre trouvé à la question précédente.

Finalement, deux foncteurs sont homotopes si et seulement si ils sont naturellement isomorphes.

8. Trouver un ensemble de cofibrations génératrices, c.-à-d. un ensemble $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{I}^\perp = \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ (s'inspirer de la question 1). Montrer que $[0]$ et que les sources des foncteurs de $\mathcal{I}$ sont petits.

Solution : Soit $[1] = \{0 < 1\}$ la catégorie avec deux objets et un unique morphisme entre les deux, $\partial[1] = \{0\} \sqcup \{1\}$ la catégorie à deux objets et aucun morphisme non-identité, et $P = [1] \cup_{\partial[1]} [1] = \{0 \rightrightarrows 1\}$ la catégorie à deux objets et deux morphismes du premier vers le deuxième. Alors les cofibrations génératrices sont $u : \emptyset \hookrightarrow [0]$, $v : \partial[1] \hookrightarrow [1]$ et $w : P \to [1]$. En effet, ce sont bien des cofibrations dont une fibration acyclique a la RLP par rapport à elles. Réciproquement, si un foncteur F a la RLP par rapport à ces trois foncteurs, la RLP par rapport à u entraîne que F est surjectif sur les objets, la RLP par rapport à v entraîne que F est plein, et la RLP par rapport à w entraîne que F est fidèle. Ces trois propriétés ensembles entraînent que F est une isofibration.

Exercice 6 Pour $A_\bullet, B_\bullet \in s\mathsf{Ab}$, le produit tensoriel est $(A \otimes B)_k = A_k \otimes B_k$ avec $d_i = d_i \otimes d_i$ et $s_j = s_j \otimes s_j$. Le complexe normalisé N_*A est par $N_kA = A_k / (\bigcup_{j=0}^{k-1} s_j(A_{k-1}))$ et $d = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_i : N_kA \to N_{k-1}A$. Pour $C, D \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$, on a $(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$ et $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes dy$.

Solution : On pourra se référer à la Section 8 du Chapitre VIII du livre *Homology* de MacLane, plus particulièrement les pages 241–244. On y trouvera également la preuve que $\nabla \circ \triangle$ est homotope à l'identité, ce qui montre le théorème d'Eilenberg–Zilber : $N_*(A \otimes B) \simeq N_*A \otimes N_*B$. Ce théorème est un point clé dans la preuve de la formule de Künneth pour l'homologie d'un produit d'espace topologiques.

1. Soit $A_\bullet, B_\bullet \in s\mathrm{Ab}$. Pour $a \in A_n$ et $b \in B_n$, on pose

$$a \vartriangle b := \sum_{p+q=n} (d_{n-p+1} d_{n-p+2} \dots d_n(a)) \otimes (\underbrace{d_0 \dots d_0}_{n-q \text{ fois}}(b)) \in \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q.$$

   Vérifier que $\vartriangle : N_*(A \otimes B) \to N_*A \otimes N_*B$ est compatible avec la différentielle et le quotient.

2. Soit $\mathrm{Sh}_{p,q} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)\}$. Par exemple $\mathrm{Sh}_{2,1} = \{(1,2,3),(1,3,2),(3,1,2)\}$. On définit : $N_*A \otimes N_*B \to N_*(A \otimes B)$ en posant, pour $a \in A_p$ et $b \in B_q$:

$$a \triangledown b := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \cdot s_{\sigma(p)} s_{\sigma(p-1)} \dots s_{\sigma(1)}(a) \otimes s_{\sigma(p+q)} s_{\sigma(p+q-1)} \dots s_{\sigma(p+1)}(b) \in A_n \otimes B_n.$$

   Vérifier que $\triangledown$ est compatible avec la différentielle et le quotient, associatif ($a \triangledown (b \triangledown c) = (a \triangledown b) \triangledown c$), et gradué commutatif ($b \triangledown a = (-1)^{\deg b \cdot \deg a} a \triangledown b$).

3. Montrer que $\vartriangle \circ \triangledown$ est l'identité.

4. Décrire les simplexes non-dégénérés de $(\Delta^p \times \Delta^q)_{p+q}$ en termes de $\mathrm{Sh}_{p,q}$.