Homotopie II : Examen

Najib Idrissi, Université de Paris

5 mars 2021, 14h–17h

Durée : 3 heures. Les notes de cours imprimées ou manuscrites sont autorisées. Le matériel électronique est interdit. Lisez bien tout le sujet avant de commencer.

Exercice 1. Soit C une catégorie et $\mathcal{W}$ une classe de morphismes. On dit que $\mathcal{W}$ vérifie la propriété “2 parmi 6” (2P6) si, étant donnés trois morphismes composables f, g, et h,

$$\{h \circ g, g \circ f\} \subseteq \mathcal{W} \implies \{f, g, h, h \circ g \circ f\} \subseteq \mathcal{W}.$$

(1A) Montrer que si $\mathcal{W}$ vérifie 2P6 et $\forall X, \mathrm{id}_X \in \mathcal{W}$, alors $\mathcal{W}$ contient tous les isomorphismes.

(1B) Montrer que si $\mathcal{W}$ vérifie 2P6 alors elle vérifie la propriété MC2 (“2 parmi 3”).

(1C) Montrer que si $\mathcal{W}$ vérifie MC2 et $\{h \circ g, g \circ f\} \subseteq \mathcal{W} \implies g \in \mathcal{W}$, alors $\mathcal{W}$ vérifie 2P6.

(1D) Montrer que la classe des isomorphismes d'une catégorie quelconque vérifie 2P6.

(1E) En déduire que les équivalences faibles d'une catégorie de modèles vérifient 2P6.

Exercice 2. Soit C une catégorie munie de deux structures de modèles $(\mathcal{W}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{W}_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2)$. On suppose que $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ et $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. On appelle “structure mixte” $(\mathcal{W}_m, \mathcal{C}_m, \mathcal{F}_m)$ définie par $\mathcal{W}_m = \mathcal{W}_2$ et $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_1$. Les cofibrations mixtes, $\mathcal{C}_m$, sont définies par propriété de relèvement.

(2A) Montrer que $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_1$.

(2B) Démontrer que $\mathcal{C}_m \cap \mathcal{W}_m = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1$. (Indication : MC3+MC5.)

(2C) Démontrer que la structure mixte est une structure de catégorie de modèles.

(2D) On dit que f est une cofibration mixte *spéciale* s'il existe $i \in \mathcal{C}_2$ et $j \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1$ tels que $f = j \circ i$. Démontrer que toute cofibration mixte spéciale est une cofibration mixte, et que toute cofibration mixte est un rétract d'une cofibration mixte spéciale.

(2E) On dit qu'une catégorie de modèles est propre à gauche si le pushout d'une équivalence faible le long d'une cofibration est une équivalence faible. Déduire de (2D) que si la structure 2 est propre à gauche, alors la structure mixte aussi.

(2F) Entre lesquelles des trois structures de modèles ci-dessus le foncteur id_{C} est-il un adjoint à droite ou à gauche de Quillen ?

Exercice 3. Une catégorie de Reedy est une catégorie R munie de deux sous-catégories $\vec{\mathsf{R}}$ et $\overleftarrow{\mathsf{R}}$ qui contiennent tous les objets et d'une fonction $\deg : \mathrm{ob}\,\mathsf{R} \to \mathbb{N}$ vérifiant :

- si $f \in \vec{\mathsf{R}}(\alpha, \beta)$, alors ($\alpha = \beta$ et $f = \mathrm{id}_\alpha$) ou $\deg \beta > \deg \alpha$;
- si $f \in \overleftarrow{\mathsf{R}}(\alpha, \beta)$, alors ($\alpha = \beta$ et $f = \mathrm{id}_\alpha$) ou $\deg \beta < \deg \alpha$;
- tout morphisme f se factorise de manière unique comme $\vec{f} \circ \overleftarrow{f}$ où $\vec{f} \in \vec{\mathsf{R}}$ et $\overleftarrow{f} \in \overleftarrow{\mathsf{R}}$.

(3A) On note $\mathsf{R}_{\leq n}$ la sous-catégorie pleine des objets de degré $\leq n$. Montrer que $\mathsf{R}_{\leq 0}$ est discrète.

(3B) Montrer qu'un ensemble partiellement ordonné fini est de Reedy. Montrer que la catégorie simpliciale Δ est de Reedy, où $\vec{\Delta}$ se compose des injections, $\overleftarrow{\Delta}$ des surjections, et $\deg = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Montrer que la catégorie opposée d'une catégorie de Reedy est de Reedy.

Soit $\alpha \in \mathsf{R}$. La catégorie *latching* $L_\alpha\mathsf{R}$ a pour objets les morphismes $f \in \vec{\mathsf{R}}(\beta,\alpha)$ où $\beta \neq \alpha$. Si $f : \beta \to \alpha$, $f' : \beta' \to \alpha$, alors $\mathrm{Hom}_{L_\alpha\mathsf{R}}(f,f') = \{g \in \vec{\mathsf{R}}(\beta,\beta') \mid f'g = f\}$. Dualement, les objets de la catégorie *matching* $M_\alpha\mathsf{R}$ sont les morphismes $f \in \overleftarrow{\mathsf{R}}(\alpha,\beta)$ où $\beta \neq \alpha$.

(3C) Décrire $L_{[2]}\Delta^{\mathrm{op}}$ et $R_{[2]}\Delta^{\mathrm{op}}$.

Soit $X \in \mathsf{C}^{\mathsf{R}}$ un diagramme indexé par R, où C est une catégorie (co)complète. On définit ses objets *latching* par les colimites $L_\alpha X := \mathrm{colim}_{f:\beta\to\alpha\in L_\alpha\mathsf{R}} X_\beta$. Dualement, ses objets *matching* sont $M_\alpha X := \lim_{f:\alpha\to\beta\in M_\alpha\mathsf{R}} X_\beta$. (La colimite vide est l'objet initial, la limite vide est l'objet terminal.)

(3D) Soit $X_\bullet \in \mathsf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ un ensemble simplicial. Décrire $M_{[n]}X_\bullet$ et $L_{[n]}X_\bullet$ pour $n \leq 2$.

(3E) Soit $X : \mathsf{R}_{\leq n-1} \to \mathsf{C}$ un diagramme (où $n \geq 1$) et $\alpha \in \mathsf{C}$ un élément de degré n. Vérifier que $L_\alpha X$ et $M_\alpha X$ restent bien définis et construire un morphisme $c_\alpha : L_\alpha X \to M_\alpha X$ naturel en α.

(3F) Soit $X : \mathsf{R}_{\leq n-1} \to \mathsf{C}$ un diagramme (où $n \geq 1$). Montrer que la donnée d'une extension de X à $\mathsf{R}_{\leq n}$ est équivalente à la donnée d'objets X_α pour chaque α de degré n et de morphismes $l_\alpha : L_\alpha X \to X_\alpha$ et $m_\alpha : X_\alpha \to M_\alpha X$ tels que $m_\alpha l_\alpha = c_\alpha$.

(3G) Soit $X, Y \in \mathsf{C}^{\mathsf{R}}$ deux diagrammes et $\varphi : X \Rightarrow Y$ une transformation naturelle. Construire des morphismes $L_\alpha^{\mathrm{rel}}\varphi : X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y \to Y_\alpha$ et $M_\alpha^{\mathrm{rel}}\varphi : X_\alpha \to M_\alpha X \times_{M_\alpha Y} Y_\alpha$ naturels en α. (On pourra utiliser les m_α, l_α construits en (3F).)

On suppose maintenant que C est une catégorie de modèles. On définit une structure de modèles (appelée structure de Reedy) sur C^{R} en posant qu'une transformation naturelle φ est : une équivalence de Reedy si chaque φ_α est une équivalence faible ; une cofibration de Reedy si chaque $L_\alpha^{\mathrm{rel}}\varphi$ est une cofibration ; une fibration de Reedy si chaque $M_\alpha^{\mathrm{rel}}\varphi$ est une fibration.

(3H) Soit $\phi : X \to Y$ une cofibration de Reedy. Montrer que le morphisme induit $L_\alpha X \to L_\alpha Y$ est une cofibration. (Indication : montrer qu'il a la LLP par rapport aux fibrations acycliques en construisant le relèvement par récurrence.)

(3I) En déduire que si $\varphi : X \to Y$ est une cofibration de Reedy, alors φ_α est une cofibration pour tout objet α. (Indication : utiliser le fait que φ_α se factorise comme $X_\alpha \to X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y \xrightarrow{L_\alpha^{\mathrm{rel}}\varphi} Y_\alpha$.)

(3J) En déduire l'existence d'adjonctions de Quillen entre la structure de Reedy et les structures projectives et injectives, si elles existent.

(3K) Montrer qu'une adjonction de Quillen $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ induit une adjonction de Quillen entre les structures de Reedy.

Exercice 4. Soit A une CDGA 1-connexe et $\alpha, \beta, \gamma \in H^*(A)$ trois classes telles que $\alpha\beta = \beta\gamma = 0$. On considère l'ensemble des éléments de la forme $vz - (-1)^{|x|}xw \in A$ où $\alpha = [x]$, $\beta = [y]$, $\gamma = [z]$ (pour des cocycles x, y, z), $dv = xy$ et $dw = yz$.

(4A) Montrer que $vz - (-1)^{|x|}xw$ est un cocycle et que sa classe dans dans $H^*(A)/I$, où $I = (\alpha, \gamma)$ est l'idéal engendré par α et γ, ne dépend pas des choix de x, y, z, v, w.

(4B) Supposons que A est quasi-isomorphe à $H^*(A)$. Soit M le modèle minimal de A. Pourquoi existe-t-il un quasi-isomorphisme direct $\phi : M \to H^*(A)$?

(4C) Utiliser ϕ pour montrer que la classe de $vz - (-1)^{|x|}xw$ vaut zéro dans $H^*(A)/I$.

(4D) En déduire un exemple de deux ADGC ayant la même cohomologie sans être quasi-isomorphes.