Corrigé du CC1

L1 MIASHS – RM2

1. Donner la définition de l'adhérence d'un ensemble.

L'adhérence $\bar{A}$ d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est constituée des points adhérents à A. Si $x \in \mathbb{R}$, on dit que x est adhérent à A si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \qquad |x - a| < \epsilon.$$

2. Les ensembles suivants sont-ils voisinages de 0, ouverts et/ou fermés ? On justifiera bien chaque réponse.
   a. $A =]1, 2[$.

Cet ensemble n'est pas voisinage de 0 car il ne contient pas 0. Il est ouvert car c'est un intervalle ouvert. Il n'est pas fermé : son complémentaire $\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ n'est pas ouvert, car ce n'est ni un voisinage de 1, ni de 2.

   b. $B = [0,1[$.

Cet ensemble n'est pas un voisinage de 0. En effet, si $\epsilon > 0$ est un réel quelconque, la boule $B(0, \epsilon)$ n'est pas incluse dans B, car elle contient $-\epsilon/2$ qui n'est pas dans B. Comme ce n'est pas un voisinage de $0 \in B$, ce n'est pas un ouvert. Enfin, il n'est pas fermé car son complémentaire $\mathbb{R} \setminus B =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ n'est pas un voisinage de son élément 1.

   c. $C =]-\pi, \pi[\cup]1, +\infty[$.

Cet ensemble est un voisinage de 0, car (par exemple) $B(0, \pi) =]-\pi, \pi[$ est inclus dans C. Il est ouvert car c'est la réunion de la boule ouverte $]-\pi, \pi[$ (cf. cours) et de l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$ (cf. cours). Ce n'est pas un fermé : son complémentaire n'est pas ouvert car ce n'est pas un voisinage de $-\pi$:

$$\mathbb{R} \setminus C = (\mathbb{R} \setminus]-\pi, \pi[) \cap (\mathbb{R} \setminus]1, +\infty[) =]-\infty, -\pi].$$

(Attention, c'est toutefois un voisinage de π !)

   d. $D = [-2, +\infty[$

C'est un voisinage de 0 car (par exemple) $B(0, 1) =]-1, \ 1[$ est inclus dans D. Ce n'est pas un ouvert car ce n'est pas un voisinage de son point -2. C'est un fermé car son complémentaire $\mathbb{R} \setminus D =]-\infty, -2[$ est ouvert (cf. cours).

3. Pour tout $n \geq 1$, on définit $A_n = [1 - 1/n, 2]$.
   a. Pour tout $n \geq 1$, déterminer l'adhérence de A_n.

Comme A_n est fermé, il est égal à sa propre adhérence : $A_n = \bar{A}_n$.

   b. L'intersection $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ est-elle ouverte, fermée ?

Chacun des A_n est fermé, donc leur intersection est fermée (cf. cours). On peut calculer (cf. TD) que :

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = [1, 2].$$

Ce n'est pas un ouvert car ce n'est ni un voisinage de 1, ni de 2.