

CONTRÔLE CONTINU 4

Raisonnement Mathématique II (RM2) – L1 MIASHS – lundi 14 février 2022

Durée : 1h30. Tout document ou matériel électronique est interdit. Lisez tout le sujet avant de commencer et justifiez toutes vos réponses. Une réponse donnée sans justification n'obtiendra pas de points.

Exercice 1. Question de cours

1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble, $x_0 \in \bar{A}$ un élément adhérent, et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Écrire la définition de « $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 ».
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2. Adhérence, intérieur et bord

Pour chacun des sous-ensembles A de \mathbb{R} suivants, déterminer (en justifiant) si A est ouvert et/ou fermé, puis déterminer son adhérence, son intérieur et son bord :

1. $A = [-\pi, 1]$.
2. $A =]1, 2[\cup \{3\}$.
3. $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$.

Exercice 3. Ouvert ? Fermé ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul, on note :

$$B_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2} \right].$$

On note $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ la réunion de tous les B_n . Est-ce que C est fermé ? Est-ce que C est ouvert ?

Exercice 4. Recherche de limite

On pourra utiliser le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ sans démonstration (vu en cours).

Pour chacune de ces fonctions, déterminer si les limites en $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$ existent. Les calculer le cas échéant.

$$f_1(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_2(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x}.$$

Exercice 5. Continuité

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie $f(x) = x - 2E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x . Est-ce que f est continue à droite (c'est-à-dire continue à droite en tout point a de \mathbb{R}) ? Continue à gauche ?
2. On pose maintenant $g(x) = \cos(\pi f(x)) = \cos(\pi(x - 2E(x)))$. Est-ce que g est continue à droite ? Continue à gauche ?