

Épreuve de contrôle continu n°1 – Corrigé

Sujet A

MARDI 6 JANVIER 2024

DURÉE : 45 MINUTES

- Documents, calculatrices et échanges par moyens électroniques sont strictement prohibés.
- Une attention particulière sera portée à la rigueur du raisonnement et à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. (Question de cours) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note B l'ensemble des points adhérents à A . Montrer que B est un fermé.

Solution. On rappelle que :

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Il s'agit de démontrer que B est fermé, ou en d'autres termes que $\mathbb{R} \setminus B$ est ouvert. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus B$; nous voulons donc démontrer que $\mathbb{R} \setminus B$ est un voisinage de x , ou encore qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus B$. Or, $x \notin B$, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Mais alors $B(x, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ et nous avons bien démontré que $\mathbb{R} \setminus B$ est un voisinage de x . $\square$

Exercice 2. Pour chacune des parties A de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer **en le justifiant** si A est ouverte, fermée et en calculer l'adhérence, l'intérieur et la frontière, lorsque A vaut :

a) $\mathbb{N}$ b) $\left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ c) $] -3, 1]$ d) $] -\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$.

Solution. a) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas ouvert car il n'existe pas de boule ouverte centrée en un point de $\mathbb{N}$ qui soit incluse dans $\mathbb{N}$. En effet, si $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, alors $B(n, r)$ est un intervalle non vide et non réduit à un singleton, donc il contient au moins un irrationnel (et a fortiori un nombre qui n'est pas un entier naturel).¹ On en déduit en particulier que $\mathbb{N}$ n'est un voisinage d'aucun de ses points et que $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$. En revanche, $\mathbb{N}$ est fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[.$$

On en déduit que $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, et enfin que $\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

b) Comme $A \subseteq \mathbb{Q}$, par le même raisonnement qu'à la question précédente, A n'est pas ouvert et $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Il est en revanche fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]1/2^{n+1}, 1/2^n[.$$

On a donc $\bar{A} = A = \partial A$.

1. On peut aussi démontrer que $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$ en notant que c'est un ouvert contenu dans $\mathbb{Q}$, et qu'on a démontré en cours que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

- c) L'ensemble A n'est ni ouvert, ni fermé. En effet, A n'est pas un voisinage de 1, car toute boule de la forme $B(1, r)$ (avec $r > 0$) contient un réel $x > 1$, par exemple $x = 1 + r/2$. De plus, $\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[$ n'est pas un voisinage de -3 , car toute boule de la forme $B(-3, r)$ (avec $r > 0$) contient un réel $x \in A$, par exemple $x = -3 + \min(r, 1)/2$.

Les raisonnements précédents démontrent que $1 \notin \mathring{A}$ et $-3 \in \bar{A}$. On en déduit que :

- On a $\mathring{A} \subseteq]-3, 1[$. Or, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A , et $] -3, 1[$ est un ouvert contenu dans A , donc $\mathring{A} =]-3, 1[$.
- On a $\bar{A} \supseteq [-3, 1]$. Or, $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A , et $[-3, 1]$ est un fermé contenant A , donc $\bar{A} = [-3, 1]$.

Enfin, on trouve que $\partial A = [-3, 1] \setminus]-3, 1[= \{-3, 1\}$.

- d) Par le même raisonnement qu'aux deux premières questions, A n'est pas ouvert et $\mathring{A} = \emptyset$.

De plus, A n'est pas fermé. En effet, tous les réels négatifs sont adhérents à A , y compris les irrationnels ; étant donné $x \leq 0$, les approximations décimales de x définissent une suite (u_n) à valeurs dans A telle que $\lim u_n = x$. En particulier, on a $\bar{A} \supseteq]-\infty, 0]$. Or, $] -\infty, 0]$ est un fermé contenant A , donc $\bar{A} \subseteq]-\infty, 0]$ et on a finalement l'égalité $\bar{A} =]-\infty, 0]$. On en déduit donc que $\partial A =]-\infty, 0]$. $\square$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n =]-2 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer l'ensemble $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer l'ensemble $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.

Solution. 1. L'ensemble A_n est ouvert mais pas fermé (voir le cours pour une démonstration).

2. Comme chacun des A_n est ouvert, leur réunion A est ouvert (théorème du cours). On ne sait en revanche pas a priori si A est fermé ou pas. Pour le savoir, il faut déterminer l'ensemble A . Démontrons que $A =]-2, 2[$.

- D'une part, on a que chaque A_n est contenu dans $] -2, 2[$, donc $A \subseteq]-2, 2[$.
- D'autre part, soit $x \in]-2, 2[$. Comme $\lim -2 + 1/n = -2$ et $\lim 2 - 1/n = 2$, il existe² un rang N à partir duquel, si $n \geq N$, alors $-2 + 1/n < x < 2 - 1/n$. En particulier, on a $x \in A_N$ et donc $x \in A$.

On en déduit que $A =]-2, 2[$, qui n'est pas fermé (cf. cours) mais qui est effectivement ouvert.

3. La suite (A_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_n \subseteq A_{n+1}$. On en déduit que leur intersection B est égale à A_1 , c'est-à-dire $B =]-1, 1[$. Cet ensemble est ouvert mais n'est pas fermé. $\square$

2. On peut exprimer N explicitement à l'aide de la fonction « partie entière ».

Épreuve de contrôle continu n°1

Sujet B

MARDI 6 FÉVRIER 2024

DURÉE : 45 MINUTES

- Documents, calculatrices et échanges par moyens électroniques sont strictement prohibés.
- Une attention particulière sera portée à la rigueur du raisonnement et à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. (Question de cours) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Rappeler la définition de « $x \in \mathbb{R}$ adhérent à A ». On note B l'ensemble des points adhérents à A . Montrer que tout fermé F contenant A contient également B .

Solution. On rappelle que x est adhérent à A si :

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Soit A, B, F comme dans l'énoncé. Étant donné $x \in B$, on veut démontrer que $x \in F$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $x \notin F$, ou encore $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Comme F est fermé, $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert, donc c'est un voisinage de son élément x . Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus F$, ou encore $B(x, r) \cap F = \emptyset$. En particulier, comme $A \subseteq F$, on a que $B(x, r) \cap A \subseteq B(x, r) \cap F = \emptyset$. Cela contredit la définition de x adhérent à A , c'est absurde. Donc on a bien $x \in F$. $\square$

Exercice 2. Pour chacune des parties A de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer **en le justifiant** si A est ouverte, fermée et en calculer l'adhérence, l'intérieur et la frontière, lorsque A vaut :

- a) $\mathbb{Z}$ b) $\left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{1\}$ c) $] -4, 6]$ d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution. a) L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas ouvert car il n'existe pas de boule ouverte centrée en un point de $\mathbb{N}$ qui soit incluse dans $\mathbb{N}$. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$, alors $B(n, r)$ est un intervalle non vide et non réduit à un singleton, donc il contient au moins un irrationnel (et a fortiori un nombre qui n'est pas un entier naturel).¹ On en déduit en particulier que $\mathbb{Z}$ n'est un voisinage d'aucun de ses points et que $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

En revanche, $\mathbb{N}$ est fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[.$$

On en déduit que $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, et enfin que $\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

- b) Comme $A \subseteq \mathbb{Q}$, par le même raisonnement qu'à la question précédente, A n'est pas ouvert et $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Il est en revanche fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n}\right[.$$

On a donc $\bar{A} = A = \partial A$.

1. On peut aussi démontrer que $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ en notant que c'est un ouvert contenu dans $\mathbb{Q}$, et qu'on a démontré en cours que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

- c) L'ensemble A n'est ni ouvert, ni fermé. En effet, A n'est pas un voisinage de 6, car toute boule de la forme $B(6, r)$ (avec $r > 0$) contient un réel $x > 6$, par exemple $x = 6 + r/2$. De plus, $\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, -4] \cup]6, +\infty[$ n'est pas un voisinage de -4 , car toute boule de la forme $B(-4, r)$ (avec $r > 0$) contient un réel $x \in A$, par exemple $x = -4 + \min(r, 1)/2$.

Les raisonnements précédents démontrent que $6 \notin \overset{\circ}{A}$ et $-4 \in \bar{A}$. On en déduit que :

- On a $\overset{\circ}{A} \subseteq]-4, 6[$. Or, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A , et $] -4, 6[$ est un ouvert contenu dans A , donc $\overset{\circ}{A} =]-4, 6[$.
- On a $\bar{A} \supseteq [-4, 6]$. Or, $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A , et $[-4, 6]$ est un fermé contenant A , donc $\bar{A} = [-4, 6]$.

Enfin, on trouve que $\partial A = [-4, 6] \setminus]-4, 6[= \{-4, 6\}$.

- d) Par le même raisonnement qu'aux deux premières questions, A n'est pas ouvert (car toute boule ouverte contient un nombre rationnel) et $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

De plus, A n'est pas fermé. En effet, tous les réels sont adhérents à A , y compris les rationnels. En effet, étant donné $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$, soit u_n l'approximation décimale à 10^{-n} près de $x - \sqrt{2}$. Alors $(u_n + \sqrt{2})$ est à valeurs dans A et $\lim(u_n - \sqrt{2}) = x$ qui est donc un point adhérent à A . On en déduit que $\bar{A} = \mathbb{R}$ et que $\partial A = \mathbb{R}$. $\square$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer l'ensemble $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer l'ensemble $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.

Solution. 1. L'ensemble A_n est fermé mais pas ouvert (voir le cours pour une démonstration).

2. La suite (A_n) est décroissante, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_n \supseteq A_{n+1}$. On en déduit que leur union A est égale à A_1 , c'est-à-dire $A = [-2, 2]$. Cet ensemble est fermé mais n'est pas ouvert.

3. Comme chacun des A_n est fermé, leur intersection B est fermée (théorème du cours). On ne sait en revanche pas a priori si B est ouvert ou pas. Pour le savoir, il faut déterminer l'ensemble B . Démontrons que $A = [-1, 1]$.

- D'une part, on a que chaque A_n contient $[-1, 1]$, donc $B \supseteq [-1, 1]$.
- D'autre part, soit $x \in B$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$-1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $-1 \leq x \leq 1$. Donc $B \subseteq [-1, 1]$.

On en déduit que $B = [-1, 1]$, qui n'est pas ouvert (cf. cours) mais qui est effectivement fermé. $\square$