Université Paris Cité
Année universitaire 2023 - 2024
L1 groupes Math & Math-Info

Campus des Grands Moulins
Raisonnement Mathématique II
MT12Y030

Épreuve de contrôle continu n°1

Sujet B

MARDI 6 FÉVRIER 2024

DURÉE : 45 MINUTES

- **Documents, calculettes et échanges par moyens électroniques sont strictement prohibés.**
- **Une attention particulière sera portée à la rigueur du raisonnement et à la qualité de la rédaction.**

Exercice 1. (Question de cours) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Rappeler la définition de « $x \in \mathbb{R}$ adhérent à A ». On note B l'ensemble des points adhérents à A. Montrer que tout fermé F contenant A contient également B.

Solution. On rappelle que x est adhérent à A si :

$$\forall r > 0, \mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing.$$

Soit A, B, F comme dans l'énoncé. Étant donné $x \in \mathrm{B}$, on veut démontrer que $x \in \mathrm{F}$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $x \not\in \mathrm{F}$, ou encore $x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$. Comme F est fermé, $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ est ouvert, donc c'est un voisinage de son élément x. Il existe donc $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$, ou encore $\mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{F} = \varnothing$. En particulier, comme $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{F}$, on a que $\mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{F} = \varnothing$. Cela contredit la définition de x adhérent à A, c'est absurde. Donc on a bien $x \in \mathrm{F}$. □

Exercice 2. Pour chacune des parties A de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer **en le justifiant** si A est ouverte, fermée et en calculer l'adhérence, l'intérieur et la frontière, lorsque A vaut :

a) $\mathbb{Z}$ b) $\left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{1\}$ c) $]-4, 6]$ d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution. a) L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas ouvert car il n'existe pas de boule ouverte centrée en un point de $\mathbb{N}$ qui soit incluse dans $\mathbb{N}$. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$, alors $\mathrm{B}(n, r)$ est un intervalle non vide et non réduit à un singleton, donc il contient au moins un irrationnel (et a fortiori un nombre qui n'est pas un entier naturel). [1] On en déduit en particulier que $\mathbb{Z}$ n'est un voisinage d'aucun de ses points et que $\mathring{\mathbb{Z}} = \varnothing$.

En revanche, $\mathbb{N}$ est fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[.$$

On en déduit que $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, et enfin que $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

b) Comme $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{Q}$, par le même raisonnement qu'à la question précédente, A n'est pas ouvert et $\mathring{\mathrm{A}} = \varnothing$. Il est en revanche fermé, car on peut écrire son complémentaire comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus \mathrm{A} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n}[.$$

On a donc $\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{A} = \partial\mathrm{A}$.

1. On peut aussi démontrer que $\mathring{\mathbb{Z}} = \varnothing$ en notant que c'est un ouvert contenu dans $\mathbb{Q}$, et qu'on a démontré en cours que $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$.

c) L'ensemble A n'est ni ouvert, ni fermé. En effet, A n'est pas un voisinage de 6, car toute boule de la forme $B(6,r)$ (avec $r>0$) contient un réel $x>6$, par exemple $x=6+r/2$. De plus, $\mathbb{R}\setminus A =]-\infty,-4]\cup]6,+\infty[$ n'est pas un voisinage de -4, car toute boule de la forme $B(-4,r)$ (avec $r>0$) contient un réel $x\in A$, par exemple $x=-4+\min(r,1)/2$.

Les raisonnements précédents démontrent que $6\notin \mathring{A}$ et $-4\in\bar{A}$. On en déduit que :

— On a $\mathring{A}\subseteq]-4,6[$. Or, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, et $]-4,6[$ est un ouvert contenu dans A, donc $\mathring{A} =]-4,6[$.

— On a $\bar{A}\supseteq[-4,6]$. Or, $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A, et $[-4,6]$ est un fermé contenant A, donc $\bar{A}=[-4,6]$.

Enfin, on trouve que $\partial A = [-4,6]\setminus]-4,6[= \{-4,6\}$.

d) Par le même raisonnement qu'aux deux premières questions, A n'est pas ouvert (car toute boule ouverte contient un nombre rationnel) et $\mathring{A}=\varnothing$.

De plus, A n'est pas fermé. En effet, tous les réels sont adhérents à A, y compris les rationnels. En effet, étant donné $x\in\mathbb{R}$, et $n\in\mathbb{N}$, soit u_n l'approximation décimale à 10^{-n} près de $x-\sqrt{2}$. Alors $(u_n+\sqrt{2})$ est à valeurs dans A et $\lim(u_n-\sqrt{2})=x$ qui est donc un point adhérent à A. On en déduit que $\bar{A}=\mathbb{R}$ et que $\partial A=\mathbb{R}$. □

Exercice 3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $A_n = [-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}]$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer l'ensemble $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer l'ensemble $B=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Est-il ouvert ? fermé ? Justifier votre réponse.

Solution. 1. L'ensemble A_n est fermé mais pas ouvert (voir le cours pour une démonstration).

2. La suite (A_n) est décroissante, c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $A_n\supseteq A_{n+1}$. On en déduit que leur union A est égale à A_1, c'est-à-dire $A=[-2,2]$. Cet ensemble est fermé mais n'est pas ouvert.
3. Comme chacun des A_n est fermé, leur intersection B est fermée (théorème du cours). On ne sait en revanche pas a priori si B est ouvert ou pas. Pour le savoir, il faut déterminer l'ensemble B. Démontrons que $A=[-1,1]$.

   — D'une part, on a que chaque A_n contient $[-1,1]$, donc $B\supseteq[-1,1]$.

   — D'autre part, soit $x\in B$. Pour tout $n\geqslant 1$, on a
   $$-1-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1+\frac{1}{n}.$$
   En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $-1\leqslant x\leqslant 1$. Donc $B\subseteq[-1,1]$.

   On en déduit que $B=[-1,1]$, qui n'est pas ouvert (cf. cours) mais qui est effectivement fermé.

□