RM2 : Examen du 2 mars 2024

L'usage de documents ou de matériel électronique est strictement interdit. ***Toute réponse donnée doit être justifiée*** *et la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Durée de l'épreuve : 1h30.*

Exercice 1 .... 4 points

(a) (2 points) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

> **Solution:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

(b) (2 points) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

> **Solution:** On considère la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est continue, et on a $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

Exercice 2 .... 4 points

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On définit un ensemble A_n par :

$$A_n = \left]1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right].$$

(a) (1 point) L'ensemble A_n est-il ouvert ? L'ensemble A_n est-il fermé ? Justifier vos réponses.

> **Solution:** L'ensemble A_n n'est ni ouvert, ni fermé.
>
> — Il n'est pas ouvert car ce n'est pas un voisinage de $2 + 1/n$. En effet, quel que soit $r > 0$, on a $2 + 1/n + r/2 > 2 + 1/n$, donc $2 + 1/n + r/2 \notin A_n$ alors que $2 + 1/n + r/2$ est dans la boule de centre $2 + 1/n$ et de rayon r.
>
> — Il n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert. En effet, on a
>
> $$\mathbb{R} \setminus A_n = \left]-\infty, 1 - 1/n\right] \cup \left]2 + 1/n, +\infty\right],$$
>
> et ce n'est pas un voisinage de $1 - 1/n$. En effet, soit $r > 0$ et posons :
>
> $$x = 1 - 1/n + \min(r/2, 1/2).$$
>
> Alors $x \in B(1 - 1/n, r)$, mais $x \notin \mathbb{R} \setminus A_n$, donc $B(1 - 1/n, r) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus A_n$.

(b) (1 point) Déterminer l'adhérence, l'intérieur et le bord de A_n pour n fixé. Justifier vos réponses.

> **Solution:**
>
> — Soit $F = [1 - 1/n, 2 + 1/n]$. L'ensemble F est un ensemble fermé qui contient A_n, donc $\bar{A}_n \subset F$. De plus, $1 - 1/n \in \bar{A}_n$ car c'est un point adhérent à A_n (cf. ci-dessus). Comme $A_n \subset \bar{A}_n$, on en déduit que $F = A_n \cup \{1 - 1/n\} \subset \bar{A}_n$ et donc $\bar{A}_n = F$.
>
> — Soit $U =]1 - 1/n, 2 + 1/n[$. L'ensemble U est un ensemble ouvert qui est inclus dans A_n, donc $U \subset \mathring{A}_n$. On a démontré ci-dessus que A_n n'est pas un voisinage de $2 + 1/n$, donc $\mathring{A}_n \subset U$. On en déduit que $\mathring{A}_n = U$.
>
> — Le bord de A_n est $\partial A_n = \bar{A}_n \setminus \mathring{A}_n = F \setminus U = \{1 - 1/n, 2 + 1/n\}$.

(c) (1 point) Déterminer (en justifiant) l'intersection $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

> **Solution:** On a $A = [1, 2]$. Nous allons le démontrer par double inclusion.
>
> — Soit $x \in [1, 2]$. Alors pour tout n, on a :
>
> $$1 - \frac{1}{n} \leq 1 \leq x \leq 2 \leq 2 + \frac{1}{n},$$

et donc $x \in A_n$ pour tout n. On en déduit que $x \in A$.

— Soit $x \in A$, c'est-à-dire que pour tout n, on a $1 - 1/n < x \leq 2 + 1/n$. Alors par le théorème de comparaison des limites de suites, on en déduit que $1 \leq x \leq 2$, et donc $x \in [1, 2]$.

(d) (1 point) Déterminer (en justifiant) l'union $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Solution: On a $B = A_1 =]0, 3]$. En effet, $A_1 \subset B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, et chaque A_n est contenu dans A_1, donc $B \subset A_1$.

Exercice 3 .... 4 points

On se propose de démontrer que la fonction suivante est continue en $a = 3$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - x,$$

(a) (0,5 points) Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - f(y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1).$$

Solution: On développe le côté droit de l'équation :

$$\begin{aligned}
(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) &= x^3 + \cancel{x^2 y} + \cancel{xy^2} - x - \cancel{x^2 y} - \cancel{xy^2} - y^3 + y \\
&= x^3 - y^3 - x + y \\
&= (x^3 - x) - (y^3 - y) \\
&= f(x) - f(y).
\end{aligned}$$

(b) (1,5 points) On pose $a = 3$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x - a| < 1$, alors on a $|x^2 + ax + a^2 - 1| < 38$.

Solution: On pose $g(x) = x^2 + ax + a^2 - 1 = x^2 + 3x + 8$. Le graphe de g est une parabole, qui atteint son minimum en $x = -3/2$. où l'on a $g(-3/2) = 23/4$ Comme le coefficient dominant est positif, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$23/4$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est donc strictement croissante sur $[2, 4]$ et on a $g(2) = 18$, $g(4) = 36$. On en déduit donc que pour tout x tel que $|x - a| < 1$, c'est-à-dire $2 < x < 4$, on a $18 < g(x) < 36$, donc $|g(x)| < 36 < 38$.

(c) (2 points) En utilisant la définition de la continuité (avec ϵ-δ), démontrer que f est continue en $a = 3$.

Solution: Soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta = \min(1, \epsilon/38)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 3| < \delta$. Alors on a $|x^2 + 3x + 8 - 1| < 38$ d'après la question précédente (car $\delta \leq 1$), et donc $|f(x) - f(3)| = |x^2 + 3x + 8 - 1||x - 3| < 38\delta \leq \epsilon$. On en déduit que f est continue en $a = 3$.

Exercice 4 .... 4 points

Déterminer (en justifiant) les limites suivantes, si elles existent. On pourra utiliser sans démonstration la continuité des fonctions usuelles vues en cours, et le fait que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(a) (1 point) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$.

(b) (1 point) $\lim_{x\to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(c) (1 point) $\lim_{x\to 0, x>0} \ln(\sin(x)) - \ln(x)$.

(d) (1 point) $\lim_{x\to 0, x>0} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

Solution:

(a) On a $\frac{\sin x}{x^3} = \frac{1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$. Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, et que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ on en déduit que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3} = +\infty$ par opérations sur les limites.

(b) Soit $f(u) = \sin(u)/u$ et $u(x) = 1/x$. Alors $\lim_{x\to +\infty} u(x) = 0$, et $\lim_{u\to 0} f(u) = 1$, donc par composée de limites, on a $\lim_{x\to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

(c) On a $\ln(\sin(x)) - \ln(x) = \ln(\sin(x)/x)$. Comme $\lim_{x\to 0, x>0} \sin(x)/x = 1$, et que ln est continue en 1, on en déduit que $\lim_{x\to 0, x>0} \ln(\sin(x)) - \ln(x) = \ln(1) = 0$.

(d) On a, pour tout $x > 0$,

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

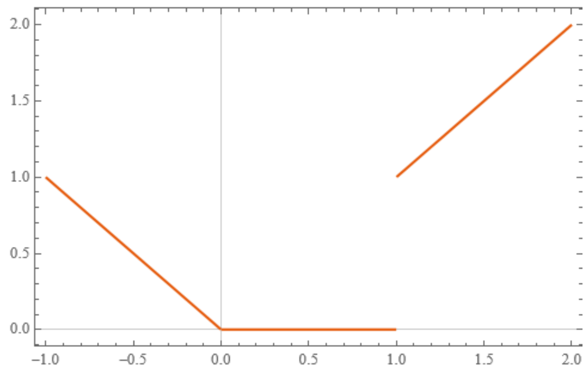
Comme la fonction racine carrée est continue en 1, et que $\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1$ on en déduit par composée de limites que $\lim_{x\to 0, x>0} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$.

Exercice 5 .... 4 points

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme suit, où $E(x)$ désigne la partie entière de x :

$$f(x) = xE(x) = x\lfloor x \rfloor.$$

Solution: On s'aide du graphe de la fonction pour l'intuition :



(a) (2 points) Déterminer si f admet une limite à droite et/ou à gauche en $a = 0$ et en $b = 1$, et si oui, les calculer.

Solution: Pour tout $x \in]-1, 0[$, on a $f(x) = -x$, donc $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x<0} -x0$. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f(x) = 0$, donc $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = 0$. Enfin, pour tout $x \in]1, 2[$, on a $f(x) = x$, donc $\lim_{x\to 1, x>1} f(x) = 1$.

(b) (2 points) Déterminer si f admet une limite en $a = 0$ et en $b = 1$, et si oui, les calculer.

Solution: On remarque qu'en $a = 0$, la limite à gauche et la limite à droite sont égales et valent $f(0)$, donc $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut $f(0) = 0$. En revanche, la limite à droite et la limite à gauche diffèrent en $b = 1$, donc $\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.