FEUILLE D'EXERCICES 1 : TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$

Exercice 1 - Voisinages
Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles des voisinages de 1?

$$A_1 = [-1,1],\quad A_2 =]-1,2],\quad A_3 =]-1,1[,\quad A_4 =]-1,2[\setminus\{1\}$$
$$A_5 =]-\infty,2],\quad A_6 =]-1,+\infty[,\quad A_7 =]-1,2]\setminus]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[.$$

Exercice 2 - Encore des voisinages
Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles des voisinages de 0?

$$A = [0,+\infty[,\quad B = [0,+\infty[\setminus\mathbb{N},\quad C =]-10^{-2},10^{-3}[\cup]1000,+\infty[,$$
$$D = \{1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\ldots,\tfrac{1}{n},\ldots\},\quad E = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-9<0\},$$
$$F = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-9>0\},\quad G = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x^4-5x^2+4>0\}.$$

Exercice 3 - Ouverts et fermés

(1) Déterminer si chacune des parties de l'exercice 1 est ou non un ouvert (respectivement un fermé) de $\mathbb{R}$.
(2) Même question pour les parties suivantes de $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$

Exercice 4 - Adhérence, intérieur, frontière
Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ de l'exercice 2, déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière.

Exercice 5 - Intersection dénombrable de parties de $\mathbb{R}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $A_n = \left[0,\frac{1}{n}\right[$.

(1) Les ensembles A_n sont-ils ouverts? fermés? voisinage de 0?
(2) Déterminer $A = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
(3) L'ensemble A est-il ouvert? fermé? voisinage de 0?
(4) Mêmes questions pour $B_n = \left]0,\frac{1}{n}\right[$ et $C_n = \left]-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[$.

Exercice 6 - Union dénombrable de parties de $\mathbb{R}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $A_n = \left[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right]$.

(1) Les ensembles A_n sont-ils ouverts? fermés? voisinage de 0?
(2) Déterminer $A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
(3) L'ensemble A est-il ouvert? fermé? voisinage de 0?

Exercice 7 - Borne supérieure et adhérence
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\sup A$ est un point adhérent à A.
(2) En déduire que si A est fermé, alors $\sup A\in A$.

Exercice 8 - Voisinages épointés
Les parties de $\mathbb{R}$ de l'exercice 1 sont-elles des voisinages épointés de 1?

Exercice 9 - Voisinages à l'infini
Les parties de $\mathbb{R}$ de l'exercice 2 sont-elles des voisinages de $+\infty$?

Exercice 10 - Adhérence et valeurs d'adhérences
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $x \in \mathbb{R}$.
On rappelle que x est *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

(1) Montrer que x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout voisinage V de x, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} |\ u_n \in V\}$ est infini.
(2) On pose $A = \{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$.
  (a) Montrer que si x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $x \in \overline{A}$.
  (b) Montrer que si $x \in \overline{A} \setminus A$ alors x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  (c) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \emptyset$.
  (d) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \{0\}$.
  (e) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \{0, 1\}$.
  (f) Donner un exemple de suite telle que $\overline{A} \setminus A = \mathbb{N}$.

Compléments

Exercice 11 - Translations d'ouverts et de fermés
Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on note $A + b = \{a + b \,|\, a \in A\}$.
Pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, on note $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$.

(1) Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, alors $A + b$ est ouvert. Que peut-on dire si A est fermé ?
(2) Montrer que si A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ et B une partie de $\mathbb{R}$ (quelconque), alors $A + B$ est ouvert.
(3) On pose $A = \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ et $B = \{n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
  (a) Montrer que A et B sont fermés.
  (b) Montrer que $A + B$ n'est pas fermé.

Exercice 12 - Passage au complémentaire de l'adhérence et de l'intérieur
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(1) Pour un réel x, exprimer avec des quantificateurs que x est un point adhérent à A (c'est-à-dire $x \in \overline{A}$).
(2) Pour un réel x, exprimer avec des quantificateurs que x est un point intérieur à A (c'est-à-dire $x \in \mathring{A}$).
(3) Montrer que $\overline{\mathbb{R} \setminus A} = \mathbb{R} \setminus \mathring{A}$.
(4) Montrer que $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus A}} = \mathbb{R} \setminus \overline{A}$.

Exercice 13 - Connexité de $\mathbb{R}$
On veut montrer par l'absurde que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$.
On suppose qu'il existe une partie ouverte et fermée A de $\mathbb{R}$ non vide et distincte de $\mathbb{R}$. Soit B son complémentaire dans $\mathbb{R}$ et soit alors $a \in A$ et $b \in B$.

(1) On se place d'abord dans le cas où $a < b$ et on pose alors $C = [a, b] \cap A$.
  (a) Montrer que C admet une borne supérieure, que l'on notera c.
  (b) En utilisant que A est fermé, montrer que $c \in A$.
  (c) En utilisant que A est ouvert, trouver une contradiction.
(2) On se place dans le cas où $b < a$. Trouver une contradiction
(3) Conclure.

Feuille d'exercices 2 : Limites de fonctions

Par défaut, on considère que les fonctions ont pour ensemble de départ l'ensemble de définition de l'expression qui les définit.

Exercice 1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = (x^2 + x - 2)\cos x$.

(a) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x^2 + x - 2| < \varepsilon$.

(b) Montrer que $f(x)$ a une limite lorsque x tend vers 1 et la déterminer.

(c) Même question pour la fonction g.

Exercice 2. On considère la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer, en utilisant la définition de la limite, que $\sqrt{x}$ a une limite lorsque x tend vers 1.

Exercice 3. On rappelle que pour tout $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$, $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ (on peut se convaincre de cette affirmation par un raisonnement purement géométrique sur le cercle trigonométrique).

(a) Démontrer que $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin x$ a une limite lorsque x tend vers a et la déterminer.

(c) Calculer, si elle existe, la limite de la fonction suivante lorsque x tend vers π :

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

(d) Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

$$\sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right); \qquad \cos x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 4. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$:

(a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x}$

(b) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(c) $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(d) $x - \lfloor x \rfloor$

(e) $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$

(f) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Exercice 5. Soient m, n des entiers strictement positifs. Discuter, selon les valeurs de m, n, l'existence et la valeur éventuelle de la limite en 0 de la fonction définie sur $]-1, 1[$ par

$$f_{m,n}(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

Exercice 6. Soient a, b des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0; x>0} \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0; x>0} \frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0.$$

Exercice 7. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

(a) Montrer l'équivalence : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

(b) Montrer que si $L > 0$, on a l'équivalence : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 9. Soit f, g les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(0) = 0\,,\ f(x) = x \left|\sin \frac{1}{x}\right| \quad (x > 0)\,; \quad g(0) = 0\,,\ g(x) = 1 \quad (x > 0).$$

(a) La fonctions f admet-elle une limite à droite en 0 ? une limite en 0 ?

(b) La fonction g admet-elle une limite à droite en 0 ? une limite en 0 ?

(c) Montrer que $g \circ f$ est une application bien définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'intervalle $]0,1]$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (g \circ f)(u_n) \neq \lim_{n \to +\infty} (g \circ f)(v_n).$$

La fonction $g \circ f$ admet-elle une limite à droite en 0 ?

(d) Relire dans le cours le théorème sur les limites de fonctions composées. Quelle hypothèse de ce théorème est ici en défaut ?

TD3 : Fonctions continues et compacité

1 Fonctions continues

Exercice 1. En utilisant la définition de la continuité :

(a) prouver la continuité de la fonction f au point a, pour

$$f(x) = x^2, \text{ en } a = 2; \quad f(x) = \sqrt{x}, \text{ en } a = 4; \quad f(x) = \frac{1}{x}, \text{ en } a = 3;$$

(b) prouver que la fonction f n'est pas continue en 0, pour

i. $f(x) = E(x)$ (partie entière de x).

ii. La fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x > 0$.

iii. La fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$.

Exercice 2. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

(a) Démontrer que la fonction $|f|$ est continue.

(b) Démontrer que les fonctions $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$, définies par

$$\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x))$$

et

$$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, sont continues.

Exercice 3. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in V$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x_0, contenu dans V, tel que pour tout $x \in U$ on a $f(x) \neq 0$.

Exercice 4. L'exercice 4 de la feuille 2 montre que la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Démontrer que les fonctions suivantes sont continues :

(a) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(b) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$;

(c) $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ;

(d) $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$;

(e) $x \mapsto x \cos(\sqrt{1 + x^2})$;

(f) $x \mapsto \sin(\pi(x - E(x)))$.

Exercice 5. Les fonctions qui suivent sont-elles continues ?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 1$ si $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $g(x) = \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$ si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ si $0 < |x| \leq \frac{\pi}{4}$, $h(0) = 1$ et $h(x) = 1/x$ si $|x| > \frac{\pi}{4}$.

(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = \arcsin(x - E(x))$.

Exercice 6. (a) Supposons que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues tels que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé (où a et b sont des réels tels que $a < b$) et soit $f : I \to I$ une fonction continue. Démontrer que f admet un point fixe (i.e., il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$).

2 Compacité

Exercice 8. Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont compacts et, en cas de non-compacité, exhiber une suite dont aucune sous-suite n'est convergente dans l'ensemble en question.

(a) $A = [1, 3]$

(b) $B = [1, +\infty[$
(c) $C =]-1, 1]$
(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$
(e) $E = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [2, 3[,\ y = x^2 - 3x + 2\}$
(f) $F = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2, 3[,\ y = x^2 - 3x + 2\}$
(g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \cos x \leq 1\}$.
(h) $H = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$

Exercice 9. Étudier la compacité des ensembles

(a) $A = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-3, 3],\ y = e^x - e^{x^3} + \frac{x^2+1}{x^4+1}\right\}$
(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq 4e^x \leq 3\}$
(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -0,5356 < \cos x < 0,7654\}$

Exercice 10. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans un compact $K \subset \mathbb{R}$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

3 Compléments

Exercice 11. (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Démontrer que f n'est continue en aucun point.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto xf(x)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que g est continue en x_0 si et seulement si $x_0 = 0$.

(c) Soit A un ensemble fini. Trouver une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que A soit l'ensemble de points de continuité de h.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ avec $x < y$ on a $f(x) < f(y)$. Démontrer que f est strictement croissante.

Exercice 13. On revient à l'exercice 11 de la feuille 1 où l'on s'intéressait, pour deux ensembles non vides A et B de $\mathbb{R}$, à l'ensemble

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Démontrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est compact et $B \subset \mathbb{R}$ est fermé, alors $A + B$ est fermé.

Exercice 14. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est compact. Démontrer que l'image de tout fermé par f est fermée (i.e. pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, $f(F)$ est fermé).

Exercice 15. Dans les cas suivants, démontrer que la fonction f est uniformément continue sur l'intervalle J :

(a) $f(x) = kx$, $J = \mathbb{R}$;
(b) $f(x) = x^2$, $J = [0, 4]$;
(c) $f(x) = 1/x$, $J = [1/10, +\infty[$;
(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $J = [0, +\infty[$;
(e) $f(x) = \sin(x)$, $J = \mathbb{R}$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ x - y &= \delta \end{cases}$$

avec $\delta > 0$. En déduire que la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $[0, +\infty]$.