TD3 : Fonctions continues et compacité

1 Fonctions continues

Exercice 1. En utilisant la définition de la continuité :

(a) prouver la continuité de la fonction f au point a, pour

$$f(x) = x^2, \text{ en } a = 2; \quad f(x) = \sqrt{x}, \text{ en } a = 4; \quad f(x) = \frac{1}{x}, \text{ en } a = 3;$$

(b) prouver que la fonction f n'est pas continue en 0, pour

i. $f(x) = E(x)$ (partie entière de x).

ii. La fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x > 0$.

iii. La fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$.

Exercice 2. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

(a) Démontrer que la fonction $|f|$ est continue.

(b) Démontrer que les fonctions $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$, définies par

$$\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x))$$

et

$$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, sont continues.

Exercice 3. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in V$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x_0, contenu dans V, tel que pour tout $x \in U$ on a $f(x) \neq 0$.

Exercice 4. L'exercice 4 de la feuille 2 montre que la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Démontrer que les fonctions suivantes sont continues :

(a) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

(b) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$;

(c) $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ;

(d) $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$;

(e) $x \mapsto x\cos(\sqrt{1 + x^2})$;

(f) $x \mapsto \sin(\pi(x - E(x)))$.

Exercice 5. Les fonctions qui suivent sont-elles continues ?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 1$ si $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $g(x) = \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$ si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ si $0 < |x| \leq \frac{\pi}{4}$, $h(0) = 1$ et $h(x) = 1/x$ si $|x| > \frac{\pi}{4}$.

(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = \arcsin(x - E(x))$.

Exercice 6. (a) Supposons que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues tels que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé (où a et b sont des réels tels que $a < b$) et soit $f : I \to I$ une fonction continue. Démontrer que f admet un point fixe (i.e., il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$).

2 Compacité

Exercice 8. Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont compacts et, en cas de non-compacité, exhiber une suite dont aucune sous-suite n'est convergente dans l'ensemble en question.

(a) $A = [1, 3]$

(b) $B = [1, +\infty[$
(c) $C =]-1, 1]$
(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$
(e) $E = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [2, 3[,\ y = x^2 - 3x + 2\}$
(f) $F = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2, 3[,\ y = x^2 - 3x + 2\}$
(g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \cos x \leq 1\}$.
(h) $H = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$

Exercice 9. Étudier la compacité des ensembles
(a) $A = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-3, 3],\ y = e^x - e^{x^3} + \frac{x^2+1}{x^4+1}\right\}$
(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq 4e^x \leq 3\}$
(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -0,5356 < \cos x < 0,7654\}$

Exercice 10. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans un compact $K \subset \mathbb{R}$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

3 Compléments

Exercice 11. (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Démontrer que f n'est continue en aucun point.
(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto xf(x)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que g est continue en x_0 si et seulement si $x_0 = 0$.
(c) Soit A un ensemble fini. Trouver une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que A soit l'ensemble de points de continuité de h.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ avec $x < y$ on a $f(x) < f(y)$. Démontrer que f est strictement croissante.

Exercice 13. On revient à l'exercice 11 de la feuille 1 où l'on s'intéressait, pour deux ensembles non vides A et B de $\mathbb{R}$, à l'ensemble

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Démontrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est compact et $B \subset \mathbb{R}$ est fermé, alors $A + B$ est fermé.

Exercice 14. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.
(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est compact. Démontrer que l'image de tout fermé par f est fermée (i.e. pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, $f(F)$ est fermé).

Exercice 15. Dans les cas suivants, démontrer que la fonction f est uniformément continue sur l'intervalle J :

(a) $f(x) = kx$, $J = \mathbb{R}$;
(b) $f(x) = x^2$, $J = [0, 4]$;
(c) $f(x) = 1/x$, $J = [1/10, +\infty[$;
(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $J = [0, +\infty[$;
(e) $f(x) = \sin(x)$, $J = \mathbb{R}$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ x - y & = \delta \end{cases}$$

avec $\delta > 0$. En déduire que la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $[0, +\infty]$.