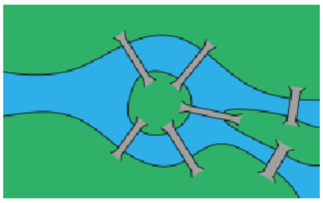
Introduction à la théorie des graphes

mercredi 5 juin 2024 15:21

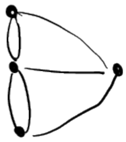
Donné à des élèves en stage de seconde à l'UFR de Mathématiques d'Université Paris Cité, le 20 juin 2024, par Najib Idrissi

1 Introduction

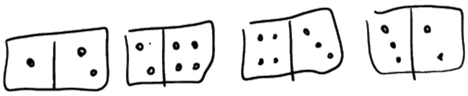
Petite histoire : les ponts de Königsberg



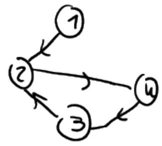
⇝ cycle eulérien dans



Dominos :



..... (⇔)



Coloriage de cartes : combien de couleurs sont nécessaires ?

Thm des 4 couleurs : pour les graphes planaires, besoin de 4 couleurs seulement

⇒ Quand est-ce qu'un graphe est planaire ?

S'il n'est pas planaire, est-ce qu'on peut le plonger dans un tore

2 Concepts de base

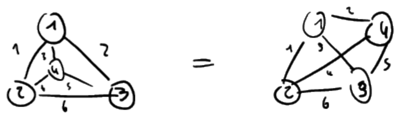
On veut définir une notion de graphe abstrait, sans se préoccuper de comment il est dessiné

→ tout ce qui compte, ce sont les relations entre les sommets et les arêtes

Pour définir un graphe, on donne ses sommets $\{s_1, s_2, \dots\}$ et ses arêtes $\{a_1, a_2, \dots\}$ et on dit quelles sont les deux extrémités de chaque arête.

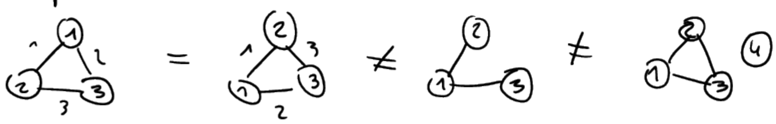
↳ La manière dont le graphe est dessiné dans le plan n'a pas d'importance

ex

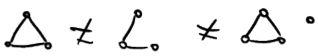


On considère que deux graphes sont les mêmes (terme technique : "isomorphes") si on peut renuméroter les sommets et arêtes de l'un pour obtenir l'autre

ex

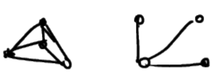


⇒ on peut se permettre de ne pas écrire les numéros, tout ce qui compte, c'est la forme du graphe :



En général, on s'intéresse aux graphes simples : pas d'arêtes doubles ni de boucles

OK :

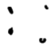
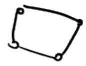
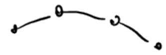


pas OK :

À partir de maintenant, tous les graphes sont simples

À partir de maintenant, tous les graphes sont simples

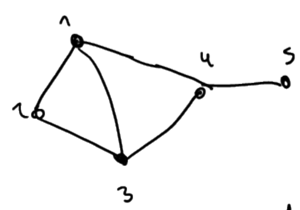
Famille de graphes classiques :

- graphes complets : K_n 
- graphes vides 
- cycles C_n  • chemin P_n 
- graphes bipartites 

③ Cycles eulériens

• Une marche est une suite de sommets tq deux sommets consécutifs sont reliés par une arête

Un chemin est une marche qui n'a pas d'arêtes répétées

ex 

(1, 2, 3, 1, 2) est une marche

(1, 3, 4, 5) est un chemin

Un cycle est un chemin qui commence et finit au même sommet ex (1, 2, 3, 1)

Un graphe est connexe si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par un chemin

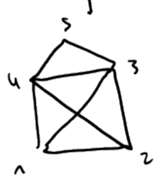
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes

ex

1	2	3	4	5
3	2	3	3	1

Un chemin eulérien est un chemin qui parcourt toutes les arêtes du graphe

$\Leftrightarrow$ on peut tracer le graphe en une seule fois sans lever le crayon

ex 

a un cycle eulérien : (1, 4, 3, 2, 4, 5, 3, 1)

 n'a pas de cycle eulérien

Dans le jeu de dominos, cela revient à pouvoir utiliser tous les dominos

Sous quelles conditions un graphe admet-il un chemin/cycle eulérien ?

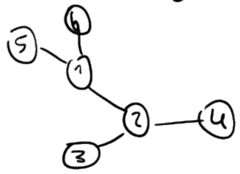
• Pour les cycles : condition nécessaire : il faut que chaque sommet soit de degré pair

En effet, dans un cycle eulérien, à chaque fois qu'on passe par un sommet, En effet, dans un cycle eulérien, à chaque fois qu'on passe par un sommet, on utilise une arête pour rentrer et une pour sortir $\Rightarrow$ nombre pair d'arêtes

Théorème Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si ses sommets sont tous de degré pair.

Nous allons démontrer ce théorème. Pour cela, besoin de la notion suivante :
Un chemin est de *longueur maximale* s'il est au moins aussi long que tous les autres chemins.

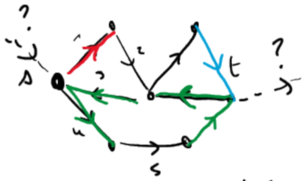
ex



Il y a des chemins de longueurs 0, 1, 2, 3
$\Rightarrow$ ceux de longueur 3 sont ceux de longueur maximale :
5, 1, 2, 4 ; 6, 1, 2, 4 ; 4, 2, 1, 5 ; 4, 2, 1, 6
On remarque qu'il peut y avoir plusieurs chemins de longueur max

Lemme Dans un graphe *pair* (= tous les sommets sont de degré pair), les chemins maximaux sont des cycles.
$\hookrightarrow$ Soit C un chemin de longueur maximal qui commence en s et termine en t. À part la 1ère arête, chaque passage par s utilise deux arêtes. De même, à part la dernière arête, chaque passage par t utilise deux arêtes.
Donc si $s \neq t$, on a utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à t. Comme il y en a un nombre pair, il en reste au moins une et on peut continuer le chemin pour en faire un plus long $\rightarrow$ absurde

Illustration :



Avec ce lemme, on peut démontrer le théorème. Soit C un chemin de longueur maximale. On sait que c'est un cycle.
Supposons (preuve par l'absurde) que C n'est pas eulérien. Il lui manque donc une arête a. Comme G est connexe, on peut trouver un chemin entre a et un sommet de C. Soit b la première arête du chemin qui rencontre un sommet $s \in C$.
Comme C est un cycle, on peut le faire commencer à v. Mais alors on peut l'allonger en lui rajoutant b. C'est absurde, car on avait supposé que le cycle est de longueur maximale.

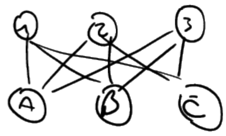
on peut l'allonger en lui rajoutant b. C'est absurde, car on avait supposé que le cycle est de longueur maximale.

Illustration :

④ Planarité

Quand peut-on dessiner un graphe sans croisement ?

ex

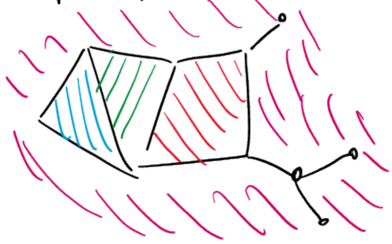


?

?

On appelle un tel graphe un graphe planaire
(⚠ Difficile à définir en réalité)

Pour un graphe planaire, on a une notion de faces :



$V = 10$
$E = 12$
$F = 4$

En traçant plusieurs graphes, on se rend compte qu'on a toujours :

Théorème $V - E + F = 2$ pour les graphes connexes (Formule d'Euler 1758)

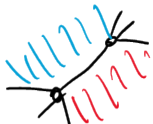
Pour le démontrer, on se ramène au cas où il n'y a qu'un seul sommet.
S'il y en a plus qu'un, on choisit une arête entre deux sommets différents et on la contracte :
(↳ possible car G est connexe)

⇒ on ne change pas le nombre de faces
⇒ on diminue le nb de sommets et le nb d'arêtes de 1
⇒ $V - E + F$ ne change pas.
On recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul sommet :

⇒ $V = 1$, $F = E + 1$ ⇒ $V - E + F = 2$

corollaire Soit G un graphe planaire simple avec au moins 3 sommets.
Alors $E \leq 3V - 6$. Si G n'a pas de triangles, alors $E \leq 2V - 4$.

Alors $E \leq 3V-6$. Si G n'a pas de triangles, alors $E \leq 2V-4$.

dém : chaque arête appartient à 2 faces: 

→ si on fait la somme du nb d'arêtes de chaque face, on trouve $2E$

chaque face a au moins 3 arêtes: 

$\Rightarrow 2E \geq 3F \Rightarrow F \leq \frac{2}{3}E$

$\rightarrow 2 = V - E + F \leq V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E$

$\Rightarrow 6 \leq 3V - E \Rightarrow E \leq 3V-6$

S'il n'y a pas de triangles — on remplace par 4 $\Rightarrow 2E \geq 4F \Rightarrow F \leq \frac{E}{2}$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow E \leq 2V-4$

ex K_5 a $V=5$ sommets et $E=10$

$3V-6 = 15-6 = 9 < E = 10 \Rightarrow$ le graphe n'est pas planaire.

$K_{3,3}$ (pas de triangle) a 6 sommet et 9 arêtes

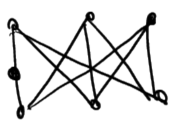
$2V-4 = 8 < E = 9 \Rightarrow$ le graphe n'est pas planaire.

⚠ Même si un graphe vérifie l'inégalité, il n'est pas forcément planaire.

ex 

$V=6$, $E=12$

$3V-6 = 12 = E$, mais le graphe n'est pas planaire

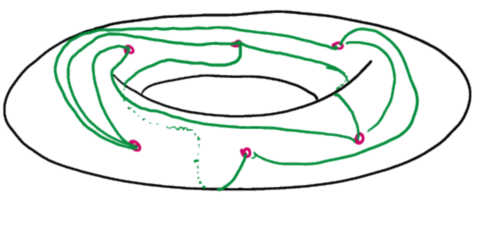


idem

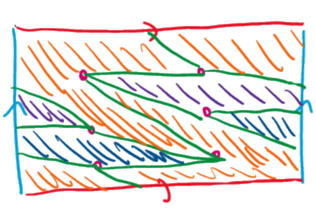
Théorème [Kuratowski 1930] Un graphe est planaire $\Leftrightarrow$ il n'a pas de sous-graphe qui est une subdivision de $K_{3,3}$ ou K_5

Généralisation intéressante : graphes toroïdaux

Les graphes que l'on peut dessiner sur un tore :



De façon équivalente :



Nouvelle formule d'Euler : $V - E + F = 0$

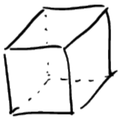
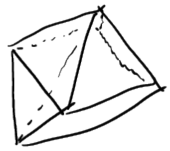
$6 - 9 + 3 = 0$

ex K_9 n'est pas toroïdal

Alternative : polyèdres réguliers

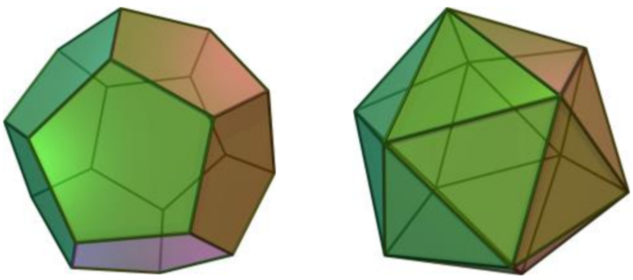
= polyèdre "complètement symétrique" :

- toutes les faces ont le même nombre d'arêtes
- tous les sommets sont incident au même nombre d'arêtes
- toutes les arêtes ont la même longueur
- tous les angles entre arêtes sont égaux
- tous les angles entre faces sont égaux

ex cube  tétraèdre  octaèdre 

dodécaèdre (12 faces pentagonales, 20 sommets, 30 arêtes)

icosaèdre (20 faces triangulaires, 12 sommets et 30 arêtes)

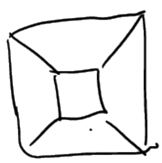


Q Est-ce qu'il y en a d'autres ?

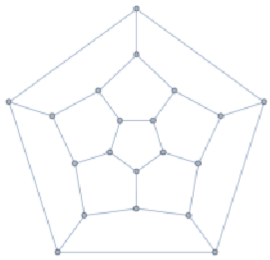
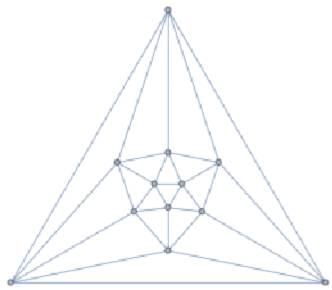
(À comparer avec les polygones : on peut avoir autant de côtés que l'on veut)

On peut y répondre grâce à la théorie des graphes !

Étant donné un polyèdre, on peut choisir une face, l'enlever et déplier le reste pour obtenir un graphe planaire

ex tétraèdre :  cube : 

octaèdre 

$\Rightarrow$ graphe planaire à V sommets, E arêtes, F faces
tous les sommets ont le même degré d, toutes les faces ont la même longueur l

Comme G est planaire, $3V \leq 2E$, $V-E+F=2$ $\quad E=\frac{Fl}{2}$
$\Rightarrow E \leq 3V-6$, $E \leq 3F-6$

$\Rightarrow \boxed{l \leq 5}$ Car si $l \geq 6$, on aurait $E=\frac{Fl}{2} \geq 3F > 3F-6$: absurde

$\boxed{d \leq 5}$ par le même raisonnement

On a donc $d \in \{3,4,5\}$ et $l \in \{3,4,5\}$ $\Rightarrow$ seulement 9 cas possibles

- Si $d=3$: on a $3V=2E \Rightarrow 3F=E+6=\frac{Fl}{2}+6$
$\Rightarrow (6-l)F=12$

les 3 valeurs de l donnent une solution :
  - si $l=3$, alors $F=4$ $\rightsquigarrow$ tétraèdre
  - si $l=4$, alors $F=6$ $\rightsquigarrow$ cube
  - si $l=5$, alors $F=12$ $\rightsquigarrow$ dodécaèdre

- Si $d=4$: $4V=2E \Rightarrow E=2F-4 \Rightarrow (4-l)F=8$
La seule possibilité est $l=3 \Rightarrow F=8$, $V=6$ $\rightsquigarrow$ octaèdre

- Si $d=5$: $5V=2E \Rightarrow \cdots \Rightarrow (10-3l)F=20$
La seule possibilité est $l=3$, $F=20$, $E=30$, $V=12$ $\rightsquigarrow$ icosaèdre