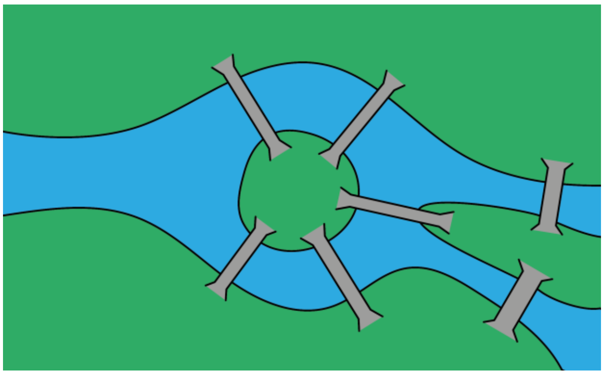
Introduction à la théorie des graphes

Najib Idrissi-Kaïtouni, Université Paris Cité

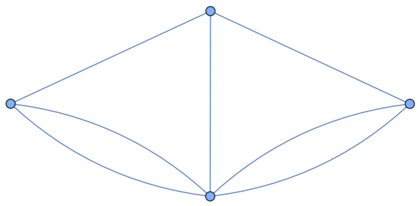
1 Introduction

Quelques exemples d'applications de la théorie des graphes dans la vie courante...

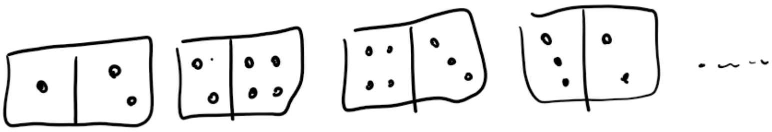
Dans la ville de **Königsberg**, les habitants voulaient faire une promenade qui passe par chaque pont une et une seule fois. Est-ce que c'est possible ?



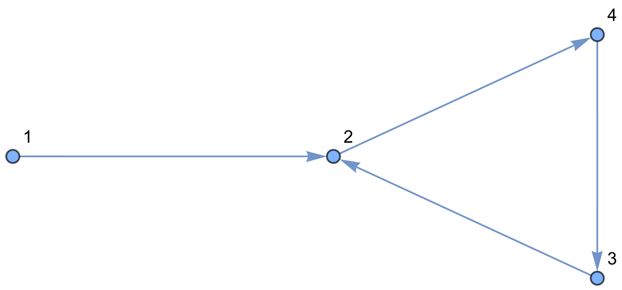
Cela revient à chercher un « cycle eulérien » dans le graphe suivant :



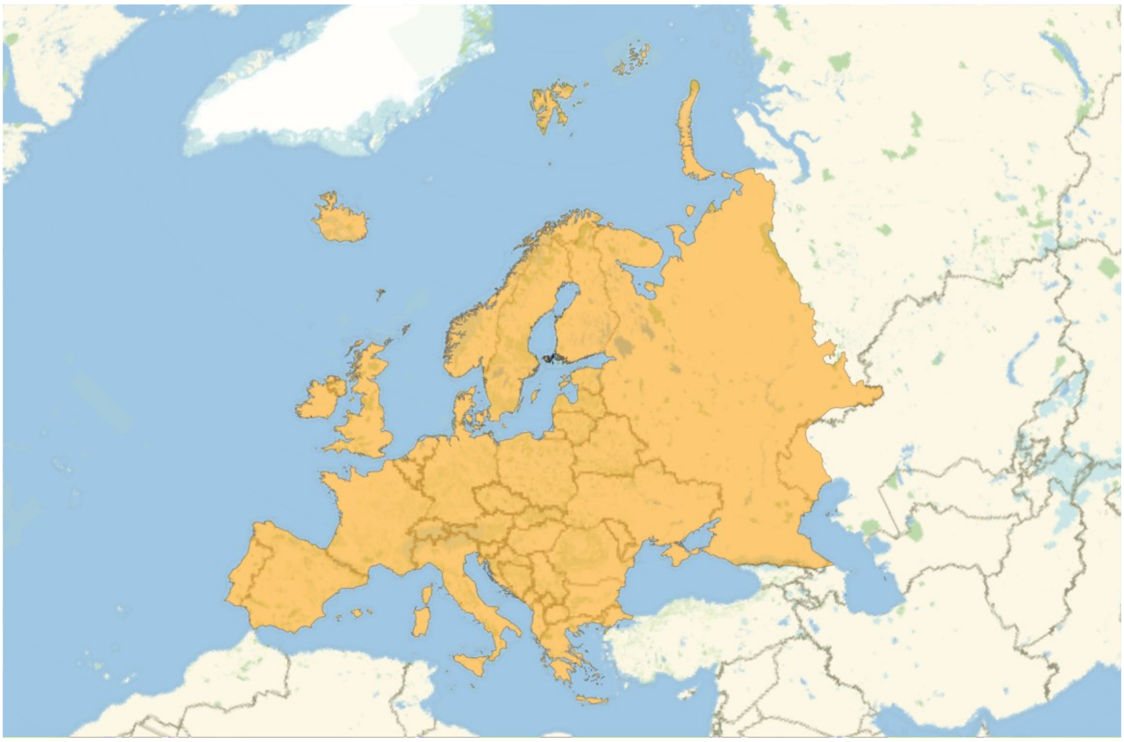
Étant donné un paquet de **dominos**, est-ce que l'on peut faire une ligne qui les utilise tous ? Par exemple, la ligne suivante :



Est équivalente au chemin suivant :



Étant donnée une **carte** avec plusieurs pays, combien de **couleurs** sont nécessaires pour la colorier ? Par exemple, combien de couleurs pour colorier une carte d'Europe ?



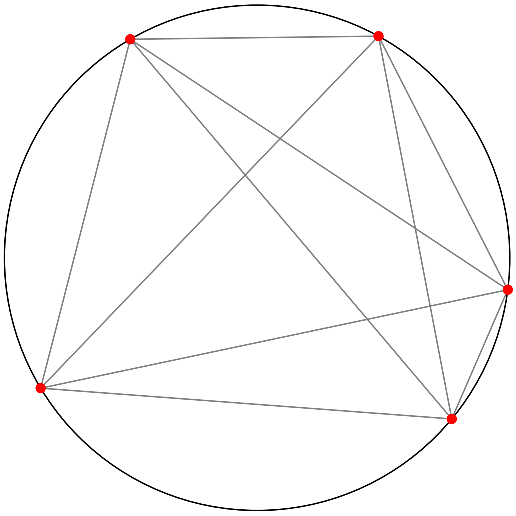
2 De l'intérêt d'écrire des preuves

En mathématiques (et ailleurs), si on cherche un motif général qui s'applique à toutes les situations, on a souvent tendance à essayer de regarder ce qui se passe dans un nombre limité de situations, puis d'essayer d'en déduire la règle générale. Ça marche assez souvent ! Mais pas toujours…

En mathématiques, où l'on se préoccupe de la vérité, on tente alors d'écrire des *démonstrations* : des preuves irréfutables de ce que l'on avance. Non seulement pour convaincre les autres, mais aussi pour être soi-même certain.e que ce qu'on pense est bien correct…

Prenons la situation suivante. On a un cercle sur lequel on place un certain nombre n de points. On s'arrange pour que les points ne soient pas dans une situation trop particulière : ils sont tous différents les uns des autres, ils ne sont pas symétriques l'un de l'autre par rapport à un point ou une droite… (En mathématiques, on dit qu'ils sont en position « générique »). Puis, on trace toutes les cordes possibles du cercle entre ces points, et on compte combien de régions du cercle on a ainsi délimité.

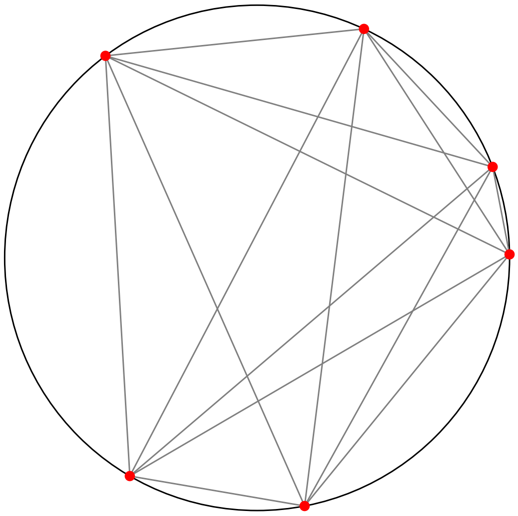
Par exemple, on a fait ce processus pour $n = 4$ dans l'image suivante, et on compte 16 régions :



Si on tente de le faire pour des petites valeurs de n, on trouve les nombres de régions suivants :

Points (n)	1	2	3	4	5
Régions ($r(n)$)	1	2	4	8	16

Est-ce que vous pouvez deviner une formule pour $r(n)$? Oui ? Vous pensez qu'il y en aura $r(n) = 2^{n-1}$, peut-être… Eh bien, comptez les régions sur cette figure, avec $n = 6$:



Ce n'est pas une erreur ! Il y a bien 31 régions délimitées par les cordes. Comme quoi, on ne peut pas forcément se fier à une idée qui ne serait fondée que sur des petites valeurs de n…

Le nombre de régions est donné, pour les petites valeurs de n, par la table suivante.

Points (n)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Régions ($r(n)$)	31	57	99	163	256	386	562	794	1093	1471

Est-ce que vous pouvez deviner la formule… ? Pour une réponse, et une démonstration, regarder la vidéo suivante (en anglais) : https://www.youtube.com/watch?v=YtkIWDE36qU

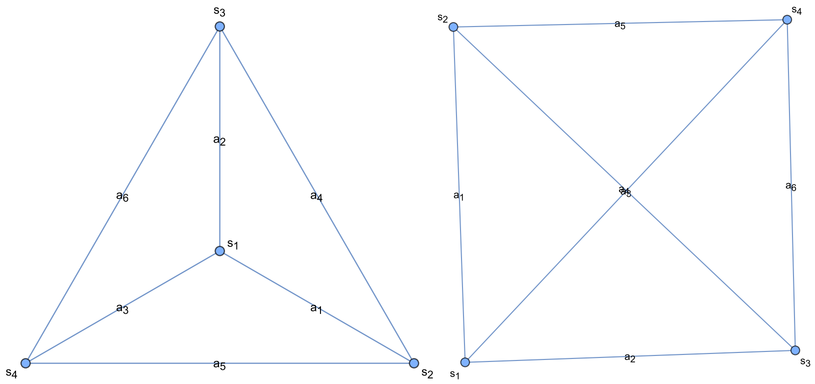
3 Concepts de base

On veut définir une notion de graphe abstrait, qui ne se préoccupe pas de comment il pourrait être dessiné. Tout ce qui compte, ce sont les relations entre les sommets (les « points » du graphe) et les arêtes (les lignes entre les sommets).

Pour définir un **graphe** (non dirigé), on doit donc se donner les données $G = (S, A, \epsilon)$:

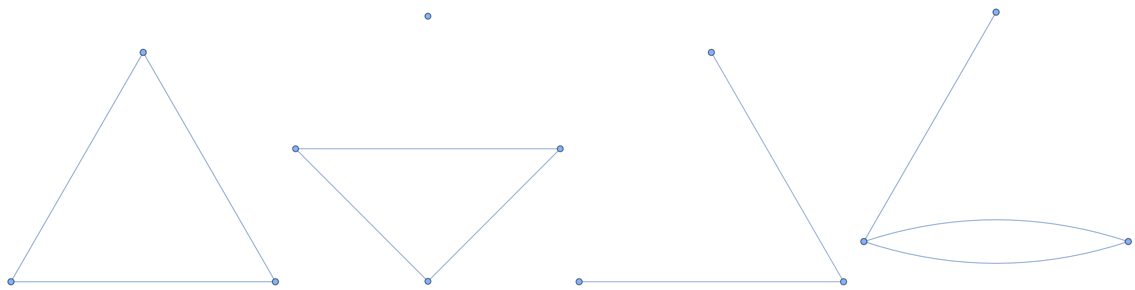
- Un ensemble de sommets $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_V\}$;
- Un ensemble d'arêtes $A = \{a_1, \dots, a_E\}$;
- Une règle qui dit quelles sont les extrémités de chaque arête. *Formellement, il s'agit d'une fonction* $\epsilon: A \to \mathcal{P}(S)$ *telle que* $|f(a)| = 2$ *pour tout* $a \in A$.

Cette définition ne dépend pas de la manière dont un graphe est dessiné dans le plan. Par exemple, les deux graphes qui suivent sont identiques :



On dit que deux graphes sont **isomorphes** (concrètement, qu'ils sont « les mêmes ») si on peut renuméroter les sommets et les arêtes du premier pour obtenir le second. *Plus précisément, pour deux graphes* $\mathrm{G} = (\mathrm{S}, \mathrm{A}, \epsilon)$ *et* $\mathrm{G}' = (\mathrm{S}', \mathrm{A}', \epsilon')$*, on dit qu'ils sont isomorphes s'il existe des bijections* $\mathrm{S} \simeq \mathrm{S}'$ *et* $\mathrm{A} \simeq \mathrm{A}'$ *qui sont compatibles avec* ϵ, ϵ'.

À partir de maintenant, on ne s'intéresse plus qu'aux graphes à isomorphisme près, et on se permettra de ne pas écrire les numéros des sommets et des arêtes. Par exemple, les graphes suivants ne sont pas isomorphes :



Ici, on va principalement s'intéresser aux graphes **simples**, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'arêtes multiples ou de boucles.

Quelques familles de graphes classiques :

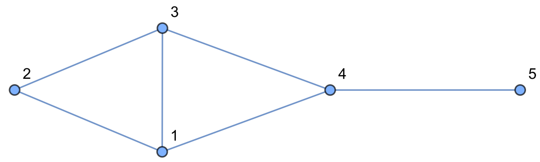
- Graphes complets K_n ;
- Graphes « vides » ;
- Cycles C_n ;
- Chemins P_n ;
- Graphes bipartites $K_{m,n}$…

4 Cycles eulériens

4.1 Quelques définitions

On se fixe un graphe (simple) G. Une **marche** dans G est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs de la suite sont reliés par une arête. Un **chemin** dans G est une marche qui ne contient pas d'arêtes répétées. La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arêtes qu'il parcourt.

Par exemple, dans le graphe suivant :



La suite $(1, 2, 3, 1, 2)$ est une marche mais pas un chemin ; $(1, 3, 4, 5)$ est un chemin.

Un cycle est un **chemin** qui commence et finit sur le même sommet. Dans l'exemple précédent, $(1, 2, 3, 1)$ est un cycle.

Un graphe est **connexe** si, pour toute paire de sommets (s, s'), il existe un chemin qui commence en s et se termine en s'.

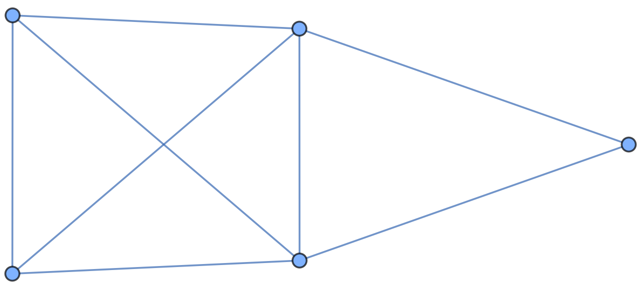
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. Dans l'exemple ci-dessus, les degrés sont donnés par :

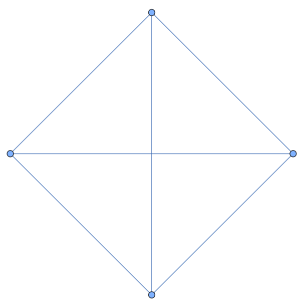
Sommet	1	2	3	4	5
Degré	3	2	3	3	1

4.2 Chemins eulériens

On dit qu'un chemin (ou un cycle) est **eulérien** s'il parcourt chaque arête du graphe une et une seule fois. Cela revient à se dire qu'on peut tracer le graphe d'un seul trait, sans lever son crayon.

Par exemple, le graphe de gauche admet un cycle eulérien, mais pas celui de droite :





Dans le jeu de dominos, cela revient à pouvoir utiliser tous les dominos !

4.3 Théorèmes d'existence

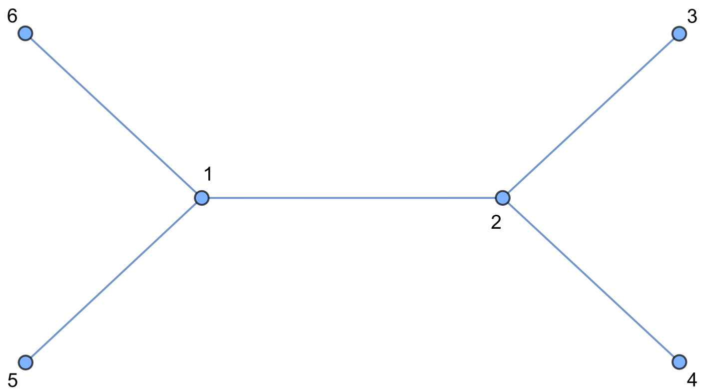
Est-ce que si on se donne un graphe G, il existe un critère qui permettrait de dire qu'il existe un chemin, voire un cycle eulérien ?

En ce qui concerne les cycles eulériens, on voit qu'une condition nécessaire est que chaque sommet soit de degré pair. En effet, à chaque fois qu'on va passer par un sommet, on va utiliser une arête pour rentrer, et une arête pour sortir ; il y a donc un nombre pair d'arêtes qui touche ce sommet. Il se trouve que cette condition nécessaire « évidente » est en fait suffisante !

Théorème : Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Un graphe dont tous les sommets sont de degré pair est appelé un graphe **pair**.

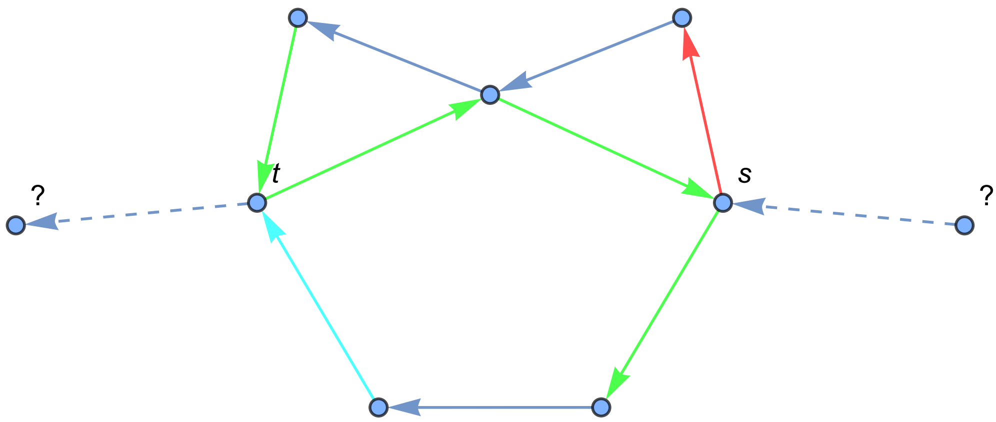
Pour démontrer ce théorème, nous allons avoir besoin de la notion suivante. On dit qu'un chemin est de **longueur maximale** si tous les autres chemins qui existent dans le graphe ont une longueur inférieure ou égale. Pour illustrer cela, prenons le graphe suivant :



Ce graphe contient des chemins de longueurs $0, 1, 2, 3$. Les chemins de longueur maximale sont donc ceux de longueur 3. Il y a plusieurs chemins de longueur maximale : $(5, 1, 2, 4)$, $(6, 1, 2, 4)$, $(4, 2, 1, 5)$, $(4, 2, 1, 6)$.

Lemme : Dans un graphe pair, tous les chemins de longueur maximale sont des cycles.

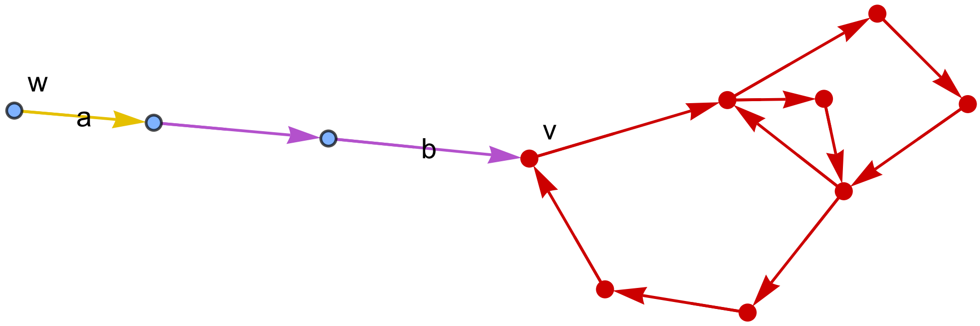
Démonstration du lemme : Soit C un chemin de longueur maximal ; on note s le premier sommet de C et t le dernier sommet de C. À part la première arête, chaque passage par s utilise deux arêtes ; et à part la dernière arête, chaque passage par t utilise deux arêtes.



Supposons (par l'absurde) que $s \neq t$. Alors on ne passe qu'un nombre impair de fois par t. Or, on a supposé que le graphe est pair, donc il reste au moins une arête non utilisée incidente à t. On peut utiliser cette arête pour allonger le chemin C. C'est absurde, car on a supposé que C est de longueur maximale. On en déduit donc que $s = t$, c'est-à-dire que C est un cycle.

Démonstration du théorème : supposons que G est un graphe pair et démontrons qu'il contient un cycle eulérien. Il existe un chemin C de longueur maximale dans G. D'après le lemme précédent, G est un cycle.

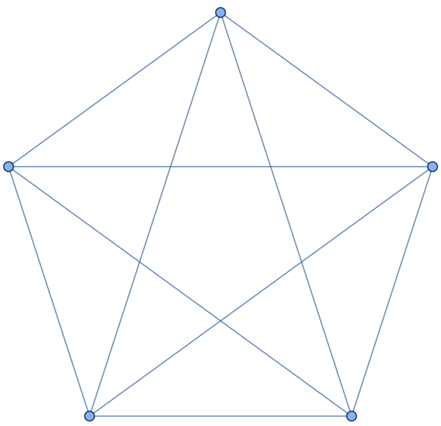
Supposons (par l'absurde) que C n'est pas eulérien. Il existe donc au moins une arête a par laquelle C ne passe pas. On note w une des extrémités de a. Comme le graphe G est connexe, il existe un chemin entre w et un sommet de C. Parmi les arêtes de ce chemin entre w et un sommet de C, on note b la première arête qui rencontre un sommet de C, qu'on appelle v.

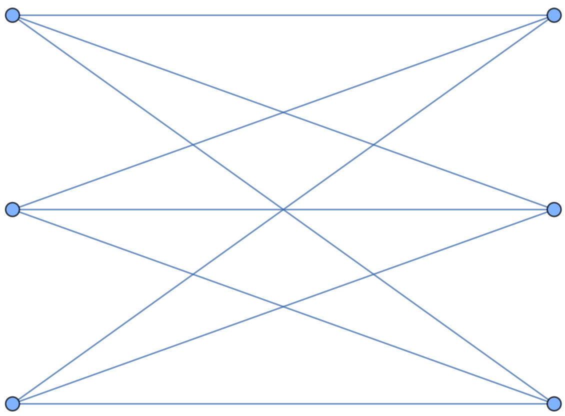


Comme C est un cycle, on peut le « faire tourner » et supposer qu'il commence et se termine en v. Mais alors, on peut l'allonger en lui rajoutant l'arête b ! C'est absurde, car on a supposé qu'il est de longueur maximale. Notre hypothèse de départ est donc fausse et, en fait, C est eulérien.

5 Planarité

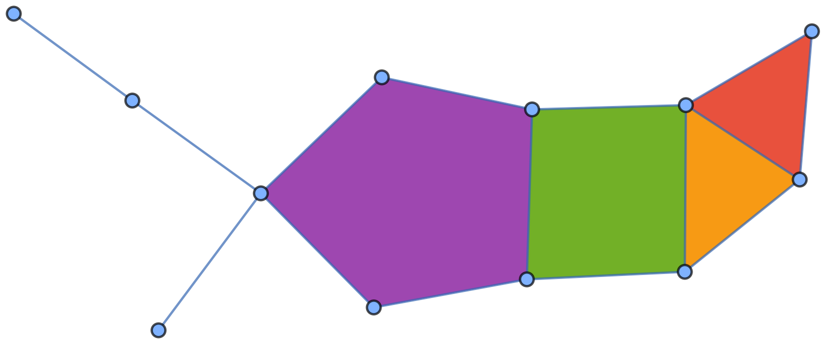
La question est la suivante : étant donné un graphe, est-il possible de le tracer sur une feuille sans que ses arêtes ne se croisent ? On dit qu'un tel graphe est **planaire**. Ce n'est pas le cas de tous les graphes ; par exemple, on ne peut pas tracer les deux graphes suivants sans croisements :





5.1 Caractéristique d'Euler

Si un graphe est tracé dans le plan, alors on peut définir une notion de « faces » :

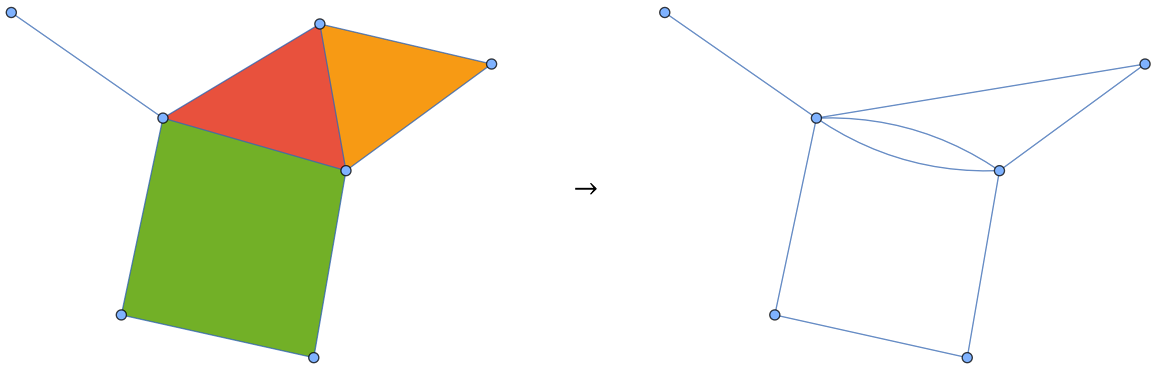


Euler a remarqué le phénomène suivant… Le graphe ci-dessus a $V = 12$ sommets, $E = 15$ arêtes, et $F = 5$ faces (y compris la « face à l'infini »). En traçant plusieurs graphes, on se rend compte rapidement que…

Théorème : Soit G un graphe *planaire connexe* à V sommets et E arêtes. Quelle que soit la manière de la tracer dans le plan, si F est le nombre de faces, alors on a $V - E + F = 2$ (« formule d'Euler »).

Pour démontrer ce résultat, on se ramène progressivement au cas où il n'y a qu'un sommet (démonstration « par récurrence »). Notons que ce résultat est vrai pour les graphes non-simples, c.-à-d. qui contiennent des boucles ou des arêtes multiples.

S'il y a au moins deux sommets, alors il y a au moins une arête a entre deux sommets distincts (car le graphe est connexe). On considère alors le graphe G' obtenu en « contractant » l'arête a.



Ce nouveau graphe a autant de faces que le précédent ($F' = F$) mais il a un sommet de moins ($V' = V - 1$) et une arête de moins ($E' = E - 1$). On trouve donc que :

$$V - E + F = V' - E' + F'.$$

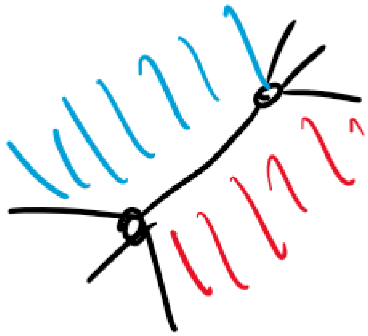
Il suffit donc de démontrer le résultat pour G'. En recommençant, on se ramène finalement au cas où il n'y a plus qu'un seul sommet. S'il n'y a qu'un seul sommet, alors $V = 1$. Chaque arête délimite une face ; en rajoutant la face à l'infini, on trouve bien $F = E + 1$ d'où $V - E + F = 2$.

5.2 Applications

Ce résultat est bien utile. Il a par exemple pour conséquence la chose suivante :

Corollaire : Soit G un graphe planaire simple connexe avec au moins 3 sommets. Alors on a que $E \leq 3V - 6$. Si G n'a pas de triangle, alors on a même $E \leq 2V - 4$.

Démonstration : chaque arête appartient à exactement deux faces :



Donc, si on additionne le nombre d'arêtes de chaque face, on trouve exactement $2E$. Or, chaque face possède au moins 3 arêtes, donc $3F \leq 2E$. En remplaçant dans $V - E + F = 2$, on obtient :

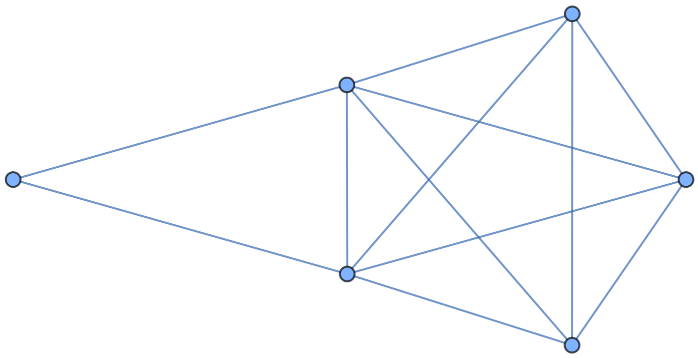
$$\begin{aligned} 3F \leq 2E \Longrightarrow F &\leq \frac{2}{3}E \\ &\Longrightarrow V - E + F \leq V - E + \frac{2}{3}E \\ &\Longrightarrow 2 \leq V - \frac{1}{3}E \\ &\Longrightarrow 6 \leq 3V - E \Longrightarrow E \leq 3V - 6. \end{aligned}$$

Si jamais il n'y a pas de triangle, alors la première inégalité devient $4F \geq 2E$; si on déroule le reste du raisonnement, on arrive à $E \leq 2V - 4$.

Cela permet de déterminer que certains graphes ne sont pas planaires. Par exemple, le graphe complet K_5 a $V = 5$ sommets et $E = 10$ arêtes. Or, $10 > 3 \times 5 - 6$, donc le graphe ne peut pas être planaire ! De la même manière, $K_{3,3}$ n'a pas de triangles, $V = 6$ sommets et $E = 9$ arêtes ; or, $9 > 2 \times 6 - 4$, donc le graphe ne peut pas être planaire non plus.

Remarque : de la même manière, on peut démontrer que $E \leq 3F - 6$ pour un graphe planaire, et que $E \leq 2F - 4$ pour un graphe planaire sans triangle.

Attention, certains graphes vérifient l'inégalité mais ne sont pas planaires pour autant !



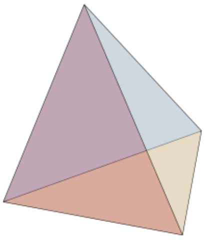
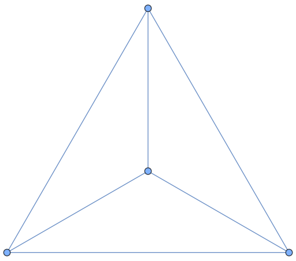
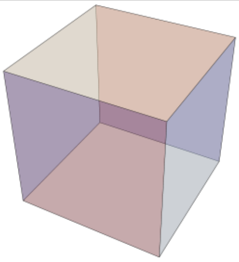
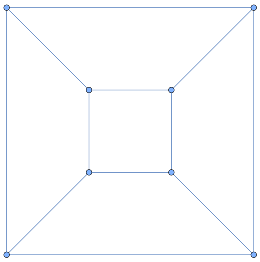
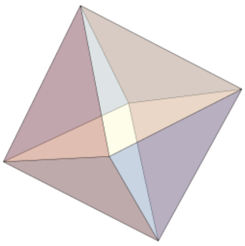
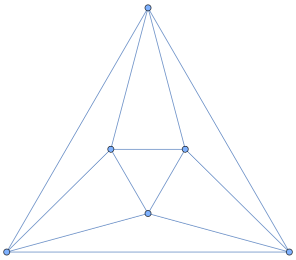
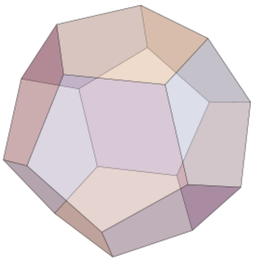
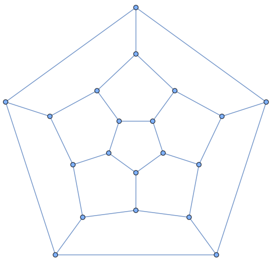
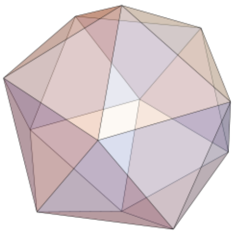
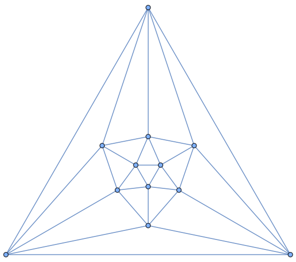
Théorème [Kuratowski 1930] : Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.

5.3 Polyèdres réguliers

Un **polyèdre** est une forme géométrique en 3d dont les faces sont des polygones. On s'intéresse depuis longtemps aux polyèdres **réguliers**, c'est-à-dire ceux qui vérifient :

- Toutes les faces ont le même nombre d'arêtes ;
- Tous les sommets ont le même degré ;
- Toutes les arêtes ont la même longueur ;
- Tous les angles entre arêtes sont égaux ;
- Tous les angles entre faces sont égaux.

Les cinq « solides platoniciens » sont des exemples de polyèdres réguliers :

Nom	Dessin	Graphe	V	E	F
Tétraèdre			4	4	4
Cube			8	12	6
Octaèdre			6	12	8
Dodécaèdre			20	30	12
Icosaèdre			12	30	20

La question se pose : est-ce qu'il y en a d'autres ? On peut y répondre grâce à la théorie des graphes !

Théorème : les cinq solides platoniciens sont les seuls polyèdres réguliers (convexes).

Étant donné un polyèdre, on peut choisir une des faces et la « déplier » pour obtenir un graphe planaire dont les sommets/arêtes/faces sont ceux du polyèdre. Il s'agit d'un graphe planaire dont tous les sommets ont un certain degré $d \geq 3$ et toutes les faces ont la même longueur $l \geq 3$.

Comme G est planaire, $V - E + F = 2$ et $3F \leq 2E$ (voir ci-dessus). De plus, dans un polyèdre, on n'a pas de sommets appartenant à deux arêtes (sinon on l'enlève), donc $3V \leq 2E$. Donc de la même manière qu'on a démontré que $E \leq 3V - 6$, on peut aussi démontrer que $E \leq 3F - 6$.

Comme chaque arête appartient à exactement deux faces, on a de plus que $2E = Fl$. On en déduit que $l \leq 5$, car sinon, on aurait une contradiction :

$$E = Fl/2 \geq 3F > 3F - 6.$$

Par un raisonnement similaire, on trouve que $d \leq 5$. Il n'y a donc pas beaucoup de cas possibles pour d et l ! On se sert du fait que $2E = dV$ (en comptant les demi-arêtes).

- Si $d = 3$: alors on a $3V = 2E$, donc :
  $$3F = E + 6 = Fl/2 + 6 \Longrightarrow (6 - l)F = 12.$$
  Toutes les valeurs de $l \in \{3, 4, 5\}$ donnent une solution :
    - Si $l = 3$, alors $F = 4$: tétraèdre.
    - Si $l = 4$, alors $F = 6$: cube.
    - Si $l = 5$, alors $F = 12$: dodécaèdre.
- Si $d = 4$, alors $4V = 2E$ et donc $E = 2F - 4$ et donc $(4 - l)F = 8$. La seule possibilité est $l = 3$ et $F = 8$ qui correspond à l'octaèdre.
- Si $d = 5$ alors $5V = 2E$ et donc $(10 - 3l)F = 20$. La seule possibilité est $l = 3$ et $F = 20$ qui correspond à l'icosaèdre.

6 Coloriage

Soit G un graphe et $r \geq 1$ un entier. On dit que G est r**-colorable** s'il existe une fonction $c: V \to \{1, \dots, r\}$ telle que, pour toute arête a d'extrémités v et v', on a $c(v) \neq c(v')$. En d'autres termes, deux sommets reliés par une arête sont de couleurs différentes. La question est de savoir quel est le plus petit r possible, appelé le **nombre chromatique** du graphe G.

Le lemme suivant est très utile pour ce qui va suivre :

Lemme : Tout graphe planaire contient au moins un sommet de degré ≤ 5.

Démonstration : on a $3V - 6 \geq E$. Or, si tous les sommets étaient de degré ≥ 6, on aurait $6V \leq 2E$, ou encore $3V \leq E$; c'est absurde !

On en déduit le résultat facile suivant :

Proposition : Tout graphe planaire est 6-colorable.

Démonstration : C'est une preuve par récurrence. Soit G un graphe planaire.

- Si $V \leq 6$ alors le résultat est évident (on donne une couleur différente à chaque sommet).

- Si $V > 6$: par le lemme précédent, il existe un sommet v de degré ≤ 5. Par hypothèse de récurrence, $G \setminus v$ est 6-colorable. Or v admet ≤ 5 voisins, donc il reste au moins une couleur pour le colorier !

En travaillant un peu plus, on obtient :

Théorème : Tout graphe planaire est 5-colorable.

Encore une fois, il s'agit d'une preuve par récurrence. Le cas $V \leq 5$ est évident, donc supposons que $V > 5$. D'après le lemme, il existe un sommet v de degré ≤ 5. Le graphe $G \setminus v$ est 5-colorable.

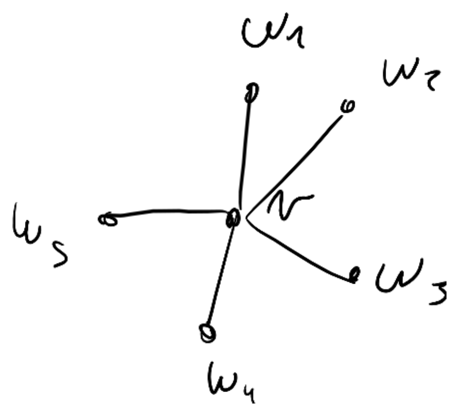
Si $d(v) < 5$ alors il reste au moins une couleur pour colorier v, donc supposons que $d(v) = 5$. Le sommet v admet donc cinq voisins $w_1, \dots, w_5$. Si jamais ils n'utilisent pas toutes les couleurs, il en reste une pour colorier v, donc on peut supposer qu'ils sont de couleurs deux à deux distinctes. Quitte à les renuméroter, supposons que $c(w_i) = i$.

On note $G_{i,j}$ le sous-graphe de $G \setminus v$ constitué des sommets de couleur i ou j. Le point clé est que sur une composante connexe de $G_{i,j}$, on peut échanger les couleurs i et j sans casser le coloriage, ce que l'on va utiliser à notre avantage.

S'il existe deux couleurs i et j telles que, dans $G_{i,j}$, w_i et w_j ne sont pas reliés par un chemin, alors on peut échanger i et j dans la composante de w_i (mais pas w_j) sans casser le coloriage. Alors v n'admet plus de voisin de couleur i et on peut choisir $c(v) = i$.

Supposons donc que, pour tous $i \neq j$, les sommets w_i et w_j sont dans la même composante connexe de $G_{i,j}$; disons qu'ils sont reliés par un chemin $P_{i,j}$, qui ne passe donc que par des sommets de couleurs i et j.

Comme le graphe est planaire, il y a un « ordre » (cyclique) sur les voisins de v. Quitte à tout renuméroter, on peut supposer que cet ordre est :



Alors $C = P_{1,3} \cup \{v\}$ est un cycle dans G, et $P_{2,4}$ doit alors traverser ce cycle. Le point d'intersection est donc à la fois de couleur 1 ou 3 et de couleur 2 ou 4. C'est bien sûr absurde !