TD5 : Extensions de corps

M1 MIC – Algèbre

Année 2025–2026

Exercice 1. Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une extension de degré impair. Démontrer que si $a \in \mathbb{K}$ est un carré dans $\mathbb{L}$, alors c'est un carré dans $\mathbb{K}$.

Exercice 2. Calculer les corps de rupture et de décomposition des polynômes suivants de $\mathbb{Q}[X]$, et donner les degrés des extensions de $\mathbb{Q}$ correspondantes :

(a) $P_1 = X^2 + 7$.
(b) $P_2 = X^3 - 2$.
(c) $P_3 = X^3 - 11$.
(d) $P_4 = X^4 + 1$.
(e) $P_5 = X^4 - 1$.
(f) $P_6 = X^4 + 2$.
(g) $P_7 = X^4 - 2$.
(h) $P_8 = X^4 + X^2 + 1$.
(i) $P_9 = X^4 - 5X^2 + 6$.
(j) $P_{10} = X^p - 1$ (où p est premier).

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

(a) Deux corps de rupture d'un polynôme sont isomorphes.
(b) Deux corps de rupture d'un polynôme irréductible sont isomorphes à unique isomorphisme près.
(c) Deux corps de décomposition d'un polynôme sont isomorphes.
(d) Deux corps de décomposition d'un polynôme sont isomorphes à unique isomorphisme près.
(e) Le corps de rupture d'un polynôme irréductible est isomorphe à son corps de décomposition.
(f) Il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout corps $\mathbb{K}$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, le degré du corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$ est majoré par $f(\deg(P))$.

Exercice 4. Déterminer les degrés des extensions suivantes :

(a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
(b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{5})$.
(c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.
(d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i + \sqrt{5})$.