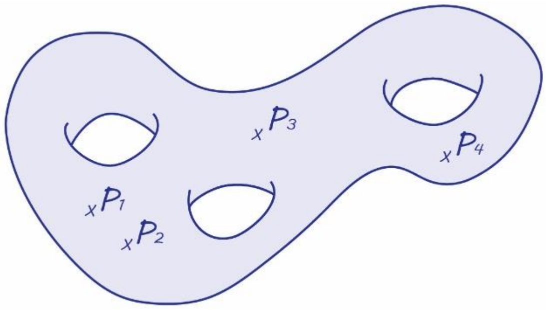
Collège de France, Cours Peccot de M. Najib Idrissi (Thèse soutenue au Laboratoire Painlevé en 2017)

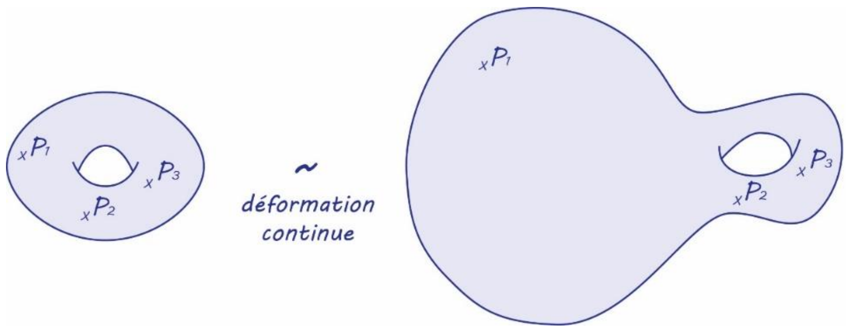
Najib Idrissi, ancien doctorant de l'Université de Lille, est lauréat du cours Peccot 2019-2020 du Collège de France pour son travail de thèse réalisé en 2017 au Laboratoire Painlevé (UMR CNRS 8524). Le cours Peccot récompense chaque année des mathématiciens de moins de trente ans s'étant signalés par des travaux prometteurs.

Les recherches de Najib Idrissi se situent dans le domaine de la topologie, la branche des mathématiques qui étudie les propriétés d'objets géométriques préservées par déformation continue. Le sujet de sa thèse est la topologie des *espaces de configuration*. Les espaces de configuration considérés en mathématiques décrivent les positions que peuvent occuper des collections de points dans un espace ambiant donné. En général, on suppose seulement que les points d'une configuration occupent des positions différentes dans l'espace ambiant.

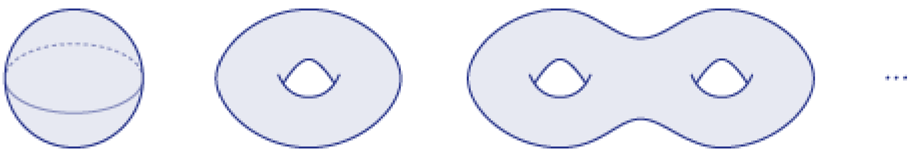


La figure ci-contre représente ainsi une « configuration » de 4 points (P_1 P_2 P_3 P_4) sur une surface.

Etudier la topologie des espaces de configuration signifie étudier des propriétés globales, préservées par déformation continue, de ces espaces. Le problème fondamental est de comprendre comment les propriétés topologiques de l'espace ambiant détermine les propriétés topologiques de l'espace de configuration. En effet, les espaces de configuration associés à des espaces ambiants équivalents par déformation continue sont-ils eux-mêmes équivalents par déformation continue (comme l'illustre la figure ci-dessous dans le cas d'une déformation d'un tore) ?



De fait, la classification topologique des surfaces par leur genre (leur nombre de trous – voir la figure ci-dessous) permet de montrer que des espaces de configurations sur des surfaces équivalentes à déformation continue près sont eux-mêmes équivalents à déformation continue près.



Ceci répond à notre question en dimension 2, mais qu'en est-il en dimension supérieure, pour la notion de *variété* qui est la généralisation abstraite de la notion de surface ?

Pour aborder ce type de problème, on dispose des outils de la topologie algébrique : l'idée est de classifier les structures topologiques en leur associant des structures algébriques (c'est-à-dire définies en termes de nombres, d'équations linéaires, polynomiales, ...), et que l'on appelle des invariants. Par exemple, en associant à une surface (topologique) son genre/nombre de trous (un nombre entier), on utilise une construction de topologie algébrique élémentaire.

Il se trouve qu'en dimension 3, on peut produire des exemples de variétés (des *espaces lenticulaires*) qui sont équivalentes à déformation continue près mais qui ont des espaces de configurations qui ne sont pas eux-mêmes équivalents à déformation continue près. L'une des particularités de ces espaces lenticulaires est qu'ils ne forment pas des variétés *simplement connexes* – une variété est simplement connexe lorsque toute courbe fermée tracée sur la variété peut se déformer continument en un point (en restant sur la variété). La simple connexité est une hypothèse classique que l'on a souvent besoin de supposer vérifiée dans les applications de la topologie. Il est donc naturel de faire cette hypothèse pour avancer dans notre problème.

Les résultats obtenus de Najib Idrissi se placent dans le cadre plus précis de la *théorie de l'homotopie réelle*, une des branches de la topologie algébrique.

Les structures algébriques que l'on considère ont généralement des éléments paramétrés par des coefficients numériques. Dans certains cas, des structures algébriques peuvent être définies avec des coefficients pris dans l'ensemble de tous les nombres réels. Ce sont les invariants topologiques associés à de telles structures algébriques, les invariants à coefficients réels de la topologie, qui définissent la théorie de l'homotopie réelle : on se concentre sur l'information détectée par ces invariants. On dit ainsi que des espaces ont même *type d'homotopie réel* s'ils sont reliés par des transformations continues qui préservent tous les invariants à coefficients réels.

Dans sa thèse, Najib Idrissi a démontré qu'un modèle algébrique facile à construire permettait de reconstituer le type d'*homotopie réel* des espaces de configuration associés à des variétés simplement connexes[1]. Les résultats obtenus par Najib Idrissi dans sa thèse (ainsi que des résultats obtenus par d'autres auteurs, Ricardo Campos et Thomas Willwacher à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich) permettent de montrer, par ce biais, que les espaces de configuration associé à des variétés de même type d'homotopie réel ont eux-mêmes le même type réel.

Référence :

N. Idrissi : *The Lambrechts-Stanley model of configuration spaces*. Invent. Math. 216 (2019), no. 1, 1-68.

Lien vers une version longue de cette communication sur le site du laboratoire : https://math.univ-lille1.fr/d7/node/10461

Lien vers la page du cours sur le site du Collège de France : http://www.college-de-france.fr/site/cours-peccot/

[1] Il s'agit d'une problématique générale de la théorie de l'homotopie réelle : fournir un modèle algébrique simple qui permet de déterminer le type d'homotopie réel d'un espace donné. Mathématiquement, le modèle des espaces de configuration construit par Najib Idrissi traduit de façon algébrique qu'un espace de configuration est obtenu en regardant toutes les positions possibles des points et en retirant les configurations où deux points se percutent.