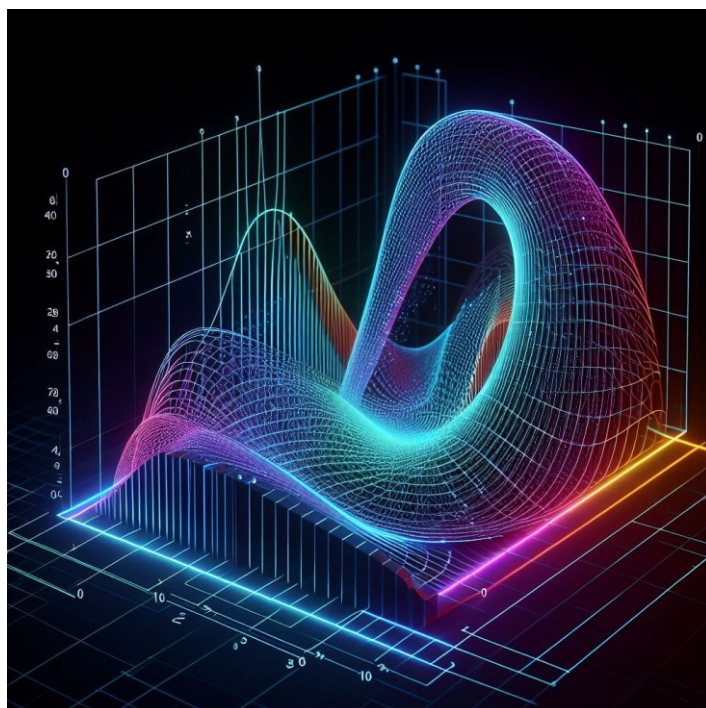


# Raisonnement Mathématique II

L1 MATHÉMATIQUES/MATHS-INFO/MATHS-  
PHYSIQUE/MIASHS/METIS



NAJIB IDRISI





# Table des matières

---

Introduction .....	5
Résumé.....	5
Prérequis.....	5
Objectifs .....	5
Remarques.....	5
Chapitre I. Rappels : Propriétés de base des nombres réels .....	7
Section I-A. Rappels sur $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ .....	7
I-A-1. Les nombres entiers naturels : $\mathbb{N}$ .....	7
I-A-2. Les nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z}$ .....	8
I-A-3. Les nombres rationnels : $\mathbb{Q}$ .....	9
I-A-4. Les nombres réels : $\mathbb{R}$ (Propriété de la borne supérieure) .....	10
I-A-5. (Bonus) Et après ? .....	11
Section I-B. Partie entière – Densité de $\mathbb{Q}$ .....	12
I-B-1. Corps archimédien .....	12
I-B-2. Partie entière .....	13
I-B-3. Densité de $\mathbb{Q}$ .....	13
Chapitre II. Topologie de $\mathbb{R}$ .....	15
Section II-A. Ouverts .....	15
II-A-1. Voisinages .....	15
II-A-2. Sous-ensembles ouverts .....	16
II-A-3. Ouverts et limites de suites.....	18
II-A-4. Intérieur .....	19
Section II-B. Fermés.....	20
II-B-1. Sous-ensembles fermés .....	20
II-B-2. Fermés et limites de suite.....	21
II-B-3. Adhérence .....	21
Section II-C. Autres notions.....	23
II-C-1. Parties séquentiellement fermées.....	23
II-C-2. Bord .....	23
II-C-3. Voisinages généralisés.....	24
Chapitre III. Limites de fonctions.....	27
Section III-A. Premières définitions .....	27
III-A-1. Limite finie d'une fonction en un point .....	27
III-A-2. Limite d'une fonction en $\pm\infty$ .....	32
III-A-3. Limite infinie d'une fonction.....	33

III-A-4. Caractérisation générale des limites .....	34
III-A-5. Cas particuliers .....	34
Section III-B. Opérations sur les limites .....	35
III-B-1. Sommes .....	36
III-B-2. Produits .....	38
III-B-3. Quotients .....	41
III-B-4. Composition .....	43
Section III-C. Limites et inégalités.....	43
III-C-1. Théorème des gendarmes.....	43
III-C-2. Comparaison des limites.....	44
III-C-3. Limites de fonctions monotones.....	45
Chapitre IV. Continuité .....	49
Section IV-A. Définitions et exemples .....	49
IV-A-1. Continuité d'une fonction.....	49
IV-A-2. Exemples .....	50
IV-A-3. Continuité à droite et à gauche .....	52
Section IV-B. Prolongement par continuité.....	52
Section IV-C. Théorème des valeurs intermédiaires .....	53
Section IV-D. Fonctions continues strictement monotones .....	55
Chapitre V. Compacité .....	59
Section V-A. Théorème de Bolzano–Weierstrass .....	59
V-A-1. Sous-suites, suites bornées .....	59
V-A-2. Parties compactes .....	60
Section V-B. Image d'un compact par une fonction continue.....	61
Section V-C. Continuité uniforme .....	62
Section V-D. Compacts et recouvrements .....	63
Index.....	67

# Introduction

---

## Résumé

Dans ce cours, on aborde les notions essentielles pour l'analyse des fonctions d'une variable réelle : limite et continuité. Pour les introduire et les étudier, on utilise de façon essentielle la notion de voisinage d'un point, et pour établir les propriétés essentielles des fonctions continues, on expliquera également les concepts d'ouvert, fermé, compact de  $\mathbb{R}$ .

## Prérequis

Propriétés de  $\mathbb{R}$ , suites numériques, limite d'une suite, généralités sur les fonctions et les ensembles.

## Objectifs

1. Comprendre et manipuler les notions topologiques dans  $\mathbb{R}$  : intervalles, ouverts, fermés, voisinages, voisinages épointés...
2. Comprendre la définition de la limite d'une fonction en un point.
3. Comprendre la notion de continuité d'une fonction et les théorèmes généraux permettant de démontrer qu'une fonction est continue.
4. Aborder la notion de compacité : théorème de Bolzano–Weierstrass, image d'un compact par une fonction continue.

## Remarques

Ces notes de cours sont très fortement inspirées des notes de cours de Catherine Gille, Frédéric Hélein et Jaouad Sahbani, que je remercie grandement.

Les passages sur fond gris sont des remarques qui relèvent plus de la culture mathématique générale ou de remarques pour aller plus loin que du cours à proprement parler.

---

Najib Idrissi  
Université de Paris & IMJ-PRG  
Bâtiment Sophie Germain  
8 place Aurélie Nemours  
75013 Paris  
<https://idrissi.eu>



# Chapitre I. Rappels : Propriétés de base des nombres réels

## Section I-A. Rappels sur $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Il existe différents types de nombres qui apparaissent dans différents contextes. Les plus simples, les entiers naturels, sont les premiers que l'on découvre : ce sont ceux qui servent à compter sur nos doigts. Au fur et à mesure que l'on avance sur le chemin des mathématiques, on découvre de nouveaux types de nombres de plus en plus sophistiqués qui recouvrent des réalités concrètes différentes.

Dans cette section, nous allons voir quatre types de nombres que vous connaissez déjà : les entiers naturels, les entiers relatifs, les nombres rationnels et les nombres réels. Leurs ensembles respectifs sont notés  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$ , et l'on a une suite d'inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ces ensembles sont construits de manière que l'on ait à chaque étape de nouvelles propriétés. Le prix de ces nouvelles propriétés est une sophistication de plus en plus avancée, et certaines autres propriétés sont de plus perdues en cours de route.

### I-A-1. Les nombres entiers naturels : $\mathbb{N}$

Les premiers nombres que l'on découvre sont les **entiers naturels**. Leur ensemble, noté  $\mathbb{N}$ , est donné par les entiers positifs, c'est-à-dire :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Dans d'autres cultures, il est parfois convenu que zéro n'est pas un entier naturel. Dans ce cas, l'ensemble  $\mathbb{N}$  ne contient les entiers strictement positifs. C'est par exemple le cas dans la plupart des pays anglophones. Dans ces pays, l'ensemble  $\{0, 1, \dots\}$  est parfois noté  $\mathbb{W}$  ou  $\mathbb{N}_0$ .

Il est possible de réaliser quelques opérations avec les entiers naturels.

1. On peut les *additionner* : étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , on peut calculer leur somme  $a + b$ .
2. On peut les *multiplier* : étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , on peut calculer leur produit  $a \times b$ , que l'on note aussi souvent  $a \cdot b$  ou tout simplement  $ab$ .
3. On peut les *comparer* : étant donnés deux entiers  $a$  et  $b$ , la proposition «  $a$  est inférieur ou égal à  $b$  », notée  $\leq$ , est soit vraie, soit fausse. On peut aussi définir la relation opposée, «  $a$  est supérieur ou égal à  $b$  », notée  $a \geq b$ , ainsi que leurs versions strictes, notées respectivement  $a < b$  et  $a > b$ .

Ces opérations vérifient des propriétés que l'on connaît bien. Listons-en quelques-unes :

1. L'addition et la multiplication sont *associatives* :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c.$$

C'est ce qui nous permet notamment de ne pas toujours écrire les parenthèses quand il n'y a que des additions et des multiplications.

Attention ! Quand les additions et les multiplications sont mélangées, il est nécessaire d'écrire les parenthèses : par exemple,

$$(2 \times 1) + 1 = 2 + 1 = 3 \neq 2 \times (1 + 1) = 2 \times 2 = 4.$$

Par convention, quand il n'y a pas de parenthèses, alors la multiplication est prioritaire sur l'addition. Par exemple, quand on écrit  $2 \times 2 + 3$ , il faut lire  $(2 \times 2) + 3 = 4 + 3 = 7$  et non pas  $2 \times (2 + 3) = 2 \times 5 = 10$ .

2. L'addition et la multiplication sont *commutatives* :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

C'est ce qui nous permet de ne pas nous préoccuper de l'ordre des variables dans les additions et les multiplications.

3. L'addition et la multiplication ont chacune un *élément neutre*, respectivement 0 et 1 :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a + 0 = a = 0 + a, \quad a \times 1 = a = 1 \times a.$$

4. La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a(b + c) = (ab) + (ac).$$

5. La relation  $\leq$  définit une *relation d'ordre* sur  $\mathbb{N}$ , ce qui signifie qu'elle est réflexive, antisymétrique, et transitive :

$$\forall a \in A, \quad a \leq a;$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad (a \leq b \text{ et } b \leq a) \Rightarrow a = b;$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad (a \leq b \text{ et } b \leq c) \Rightarrow a \leq c.$$

6. Enfin, la relation d'ordre  $\leq$  est compatible avec l'addition et la multiplication au sens où :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \text{ et } ac \leq bc.$$

Cette structure et ces propriétés de  $\mathbb{N}$  en font ce qu'on appelle un « semi-anneau (commutatif, ordonné) ».

Cependant, tout n'est pas parfait. L'ensemble  $\mathbb{N}$  ne vérifie pas toutes les propriétés que l'on voudrait. L'un de ses problèmes est le suivant. **L'opposé** d'un nombre  $a$ , s'il existe, est défini comme étant l'unique nombre  $b$  tel que l'on ait  $a + b = 0$ . Dans  $\mathbb{N}$ , seul 0 a un opposé ! Si  $a \in \mathbb{N}$  est un entier naturel avec  $a \neq 0$ , alors  $a > 0$  et donc quel que soit l'entier naturel  $b \in \mathbb{N}$  que l'on choisit, on aura  $a + b > 0$ , donc  $b$  ne peut pas être l'opposé de  $a$ .

Comment construire  $\mathbb{N}$  ? C'est là une question à laquelle il est difficile de répondre. En règle générale, on pose l'existence de l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  comme un axiome, c'est-à-dire un principe de base que l'on admet comme vrai et qui sert de base de travail pour les autres raisonnements. Le choix des axiomes est subjectif : ce qui nous paraît évident ne l'est pas forcément pour d'autres. Tout le travail mathématique consiste à déterminer ce qui est vrai à partir d'un ensemble restreint d'axiomes, admis par tout le monde parce qu'ils paraissent évidents et sont considérés comme universellement et fondamentalement vrais. Tout le monde s'accorde pour dire qu'il est raisonnable de tenir pour acquis le fait de pouvoir compter !

## I-A-2. Les nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers relatifs**, noté  $\mathbb{Z}$ , est construit de manière à résoudre le problème précédent, à savoir, le fait que certains entiers naturels n'ont pas d'opposé. Il contient tous les nombres entiers, qu'ils soient positifs ou négatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un entier naturel est toujours aussi un nombre entier relatif, c'est-à-dire que l'on a une inclusion d'ensembles  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . On peut effectuer les mêmes opérations (additions, multiplications) sur les entiers relatifs que sur les entiers naturels, et on a toujours une relation d'ordre  $\leq$ . La relation d'ordre  $\leq$  est compatible avec l'addition, et elle est aussi compatible avec la multiplication si l'on prend garde aux signes. Si  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  sont des entiers relatifs, alors on a deux cas possibles suivant le signe de  $c$  :

1. Si  $c \geq 0$ , alors  $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$ .
2. Si  $c \leq 0$ , alors  $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$ .

On voit donc que  $\mathbb{Z}$  garde plusieurs propriétés intéressantes de  $\mathbb{N}$ . On a gagné une propriété supplémentaire. Tout entier relatif  $a \in \mathbb{Z}$  admet un **opposé**, noté  $-a$ , qui vérifie la propriété  $a + (-a) = 0$ . Cet opposé est unique : en effet, si  $b$  est un autre opposé de  $a$ , c'est-à-dire  $a + b = 0$ , alors :

$$b = b + a + (-a) = a + b + (-a) = 0 + (-a) = -a.$$

On a donc une nouvelle opération supplémentaire sur  $\mathbb{Z}$ , la **soustraction**, définie par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a - b := a + (-b).$$



Attention ! Cette opération n'est ni associative ni commutative. Par exemple,

$$3 - (1 - 1) = 3 - 0 = 3 \neq (3 - 1) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Il faut donc toujours faire très attention aux parenthèses quand on a affaire à des soustractions. Notez en particulier que l'on doit distribuer le signe « moins » sur les parenthèses :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a - (b + c) = a - b - c.$$

Cette structure et ces propriétés font de  $\mathbb{Z}$  ce qu'on appelle un « anneau (commutatif, ordonné) ».

Cependant,  $\mathbb{Z}$  n'est pas encore « parfait ». Il lui manque au moins une propriété, que nous allons expliquer. L'inverse d'un nombre  $a$ , s'il existe, est défini comme étant le nombre  $b$  tel que l'on ait  $ab = 1$ . En général, on ne peut pas s'attendre à ce que 0 ait un inverse (car sinon on aurait  $1 = 0 \times b = 0$ ). Le problème est que très peu d'entiers relatifs ont des inverses dans  $\mathbb{Z}$  : c'est uniquement le cas de 1 et de  $-1$ . L'ensemble des nombres rationnels, défini ci-dessous, est conçu pour résoudre ce problème.

L'ensemble  $\mathbb{Z}$  possède une propriété supplémentaire : tout nombre entier relatif admet un opposé. Cependant, on a perdu quelque chose. L'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  vérifie la propriété suivante :

« Tout sous-ensemble  $A \subset \mathbb{N}$  non vide a un plus petit élément. »

On dit aussi que la relation d'ordre  $\leq$  sur  $\mathbb{N}$  est « bien fondée ». Cela n'est malheureusement plus vrai dans  $\mathbb{Z}$  ! Par exemple, l'ensemble des entiers impairs négatifs  $\{0, -2, -4, -6, -8 \dots\}$  est un sous-ensemble non vide, mais il n'admet pas de minimum... Il faut faire des compromis.

### I-A-3. Les nombres rationnels : $\mathbb{Q}$

Pour résoudre le problème précédent, on introduit une nouvelle classe de nombres : les nombres rationnels. Leur ensemble, dénoté  $\mathbb{Q}$ , contient tous les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient (ratio) de deux nombres entiers relatifs, le dénominateur devant bien sûr être non nul. Plus précisément, on a :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

On lit cette phrase mathématique de la manière suivante : «  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme  $p/q$ , où  $p$  est un nombre entier relatif et  $q$  est un nombre entier relatif non nul ». L'ensemble  $\mathbb{Q}$  contient donc des nombres tels que  $3/8$ ,  $-5/2$ ,  $2/1$ ,  $(-2)/(-3)$  etc. Il faut bien noter qu'un nombre rationnel peut avoir plusieurs représentations comme un quotient de deux nombres entiers relatifs. Par exemple, on a :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{7}{14} = \frac{-2}{-4} = \dots$$

Notons aussi qu'un nombre entier relatif est toujours un nombre rationnel : si  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $k = k/1$  est bien un élément de  $\mathbb{Q}$ .

On a les mêmes opérations qu'avant sur  $\mathbb{Q}$  :

1. On peut additionner deux nombres rationnels. Pour le faire, il faut trouver un dénominateur commun, c'est-à-dire un multiple commun des deux dénominateurs. On peut toujours choisir le produit des dénominateurs :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}.$$

Mais en règle générale, il est plus intelligent de choisir un dénominateur plus petit, comme le PPCM de  $q$  et  $q'$ . On fera cependant bien attention à ne pas écrire de bêtises comme :

$$\left\langle \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'} \right\rangle \text{ est complètement faux !}$$

Par exemple,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \dots$

De plus, tout nombre a un opposé : si  $p/q \in \mathbb{Q}$ , alors son opposé est simplement  $-p/q$ .

2. On peut aussi multiplier deux nombres rationnels, ce qui est beaucoup plus simple que de les additionner : on a tout simplement

$$\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$$

3. Enfin, on peut comparer deux nombres rationnels. Comme pour l'addition, il faut faire bien attention ! Plus le numérateur est grand, plus le résultat est grand, mais plus le dénominateur est grand, plus le résultat est petit. En règle générale, pour des entiers relatifs strictement positifs, alors :

$$\forall p, q, p', q' \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' \leq p'q.$$

Par exemple,  $49/28$  est plus petit que  $43/24$ , car  $49 \times 24 = 1176 \leq 43 \times 28 = 1204$ . La condition sur les signes est très importante : par exemple,  $\frac{1}{-2}$  est inférieur à  $\frac{1}{4}$ , quand bien même  $4 \geq -2$ .

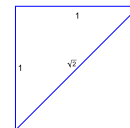
La nouvelle propriété de  $\mathbb{Q}$  est que tout nombre rationnel  $x \in \mathbb{Q}$  a un **inverse**,<sup>1</sup> c'est-à-dire un (unique) nombre  $x^{-1} \in \mathbb{Q}$  tel que :

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Si  $x = p/q$  avec  $p \neq 0$ , alors son inverse est tout simplement donné par  $x^{-1} = q/p$ .

Mais tout n'est pas encore gagné dans  $\mathbb{Q}$ . Son défaut est plus difficile à expliquer que ceux de  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Informellement, l'ensemble des entiers rationnels est plein de « trous » ! Par exemple, l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$  n'a pas de borne supérieure (cf. cours du premier semestre). On ne peut pas les distinguer à l'œil nu comme ceux de  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , mais ils sont pourtant là.

Supposons que l'on ait un triangle rectangle, et que ses deux plus petits côtés sont de longueur 1. Alors par le théorème de Pythagore, l'hypoténuse a pour longueur  $\sqrt{2}$ , qui est irrationnel. Dit autrement, la diagonale d'un carré dont les côtés sont de longueur entière n'est pas forcément un nombre rationnel !



## I-A-4. Les nombres réels : $\mathbb{R}$ (Propriété de la borne supérieure)

L'ensemble des nombres réels est conçu pour pallier le problème précédent. On « bouche les trous », en quelque sorte ! La nouvelle propriété que vérifie  $\mathbb{R}$  s'appelle la propriété de la borne supérieure. Pour l'expliquer, rappelons la terminologie du premier semestre.

**Définition.** Un ensemble de nombres  $A$  est dit *majoré* s'il existe un nombre  $M$  tel que :

$$\forall x \in A, \quad x \leq M.$$

Un tel nombre  $M$  s'appelle un *majorant* de  $A$ . Les majorants ne sont pas uniques : si  $M$  est un majorant, alors  $M + 1$  aussi.

De la même manière,  $A$  est *minoré* s'il existe un nombre  $m$  tel que  $\forall x \in A, x \geq m$  et on dit que  $m$  est un *minorant* de  $A$ .

**Définition.** Soit  $A$  un ensemble de nombres. Le *maximum* de  $A$  (s'il existe) est l'unique élément de  $A$  qui est un majorant de  $A$ . On dit aussi que c'est le *plus grand élément* de  $A$  et on le note  $\max A$ . Le *minimum* (s'il existe), aussi appelé *plus petit élément*, est défini de manière similaire et on le note  $\min A$ .

Il faut bien distinguer cette notion de la suivante :

<sup>1</sup> Cette structure et ces propriétés font de  $\mathbb{Q}$  un « corps ordonné ».

**Définition.** Soit  $A$  un ensemble de nombres. La *borne supérieure* de  $A$  (si elle existe), notée  $\sup A$  est le plus petit majorant de  $A$ . La *borne inférieure* (si elle existe), notée  $\inf A$ , est le plus grand minorant de  $A$ .

*Exemple.* Considérons l'intervalle  $A = [0, 1[$ . Alors  $A$  n'a pas de maximum. En effet, si  $x \in A$  est un élément quelconque, alors  $\frac{x+1}{2}$  est encore un élément de  $A$ , et  $x < \frac{x+1}{2}$ , donc  $x$  ne peut pas être un majorant de  $A$ . Cependant, la borne supérieure de  $A$  est  $\sup A = 1$ . En effet, 1 est bien un majorant de  $A$ . De plus, si  $M$  est un autre majorant de  $A$ , alors  $x \leq M$  pour tout  $x \in A$ , et on en déduit que  $1 \leq M$ , donc 1 est bien le plus petit majorant de  $A$ .

On a plusieurs caractérisations de la borne supérieure d'un ensemble.

**Proposition.** Soit  $A$  un ensemble de nombres et  $M$  un nombre. Alors  $M$  est la borne supérieure de  $A$  si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Le nombre  $M$  majore  $A$ , c'est-à-dire

$$\forall x \in A, \quad x \leq M.$$

2. Pour tout  $\epsilon > 0$ , le nombre  $M - \epsilon$  n'est pas un majorant de  $A$ , c'est-à-dire<sup>2</sup> :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, \quad x \geq M - \epsilon.$$

L'exemple de la section précédente montre que dans  $\mathbb{Q}$ , il existe des ensembles majorés et non vides qui n'ont pas de bornes supérieures, ici, l'ensemble  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ . On peut imaginer que ces bornes supérieures manquantes sont justement les « trous » de  $\mathbb{Q}$ .

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est construit de telle sorte que ces trous n'apparaissent plus. Tous les nombres rationnels sont des nombres réels (en d'autres termes,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ), mais l'inverse n'est pas vrai. Par exemple,  $\sqrt{2}$  est un nombre réel qui n'est pas rationnel.

Nous pouvons faire toutes les opérations précédentes sur les nombres réels : addition, multiplication, comparaison. Toutes les propriétés listées ci-dessus sont vérifiées : associativité, commutativité, existence des opposés et des inverses, distributivité, compatibilité avec la relation d'ordre... Mais  $\mathbb{R}$  possède une propriété fondamentale, la propriété de la borne supérieure.<sup>3</sup>

**Théorème (Propriété de la borne supérieure).** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un ensemble de nombres. Si  $A$  est :

- i. Non vide ;
- ii. Et majoré ;

Alors  $A$  admet une borne supérieure  $\sup A \in \mathbb{R}$ .

Attention, les deux conditions sont essentielles ! L'ensemble vide est majoré mais il n'admet pas de borne supérieure. Si  $A$  n'est pas majoré, alors il n'a pas de borne supérieure non plus.

Il se pose maintenant la question de comment construire l'ensemble  $\mathbb{R}$ . Ce n'est pas une question facile. Il existe plusieurs méthodes. En particulier, on peut mentionner la complétion de Cauchy et la méthode des coupures de Dedekind. Ces deux constructions sont équivalentes mais font appel à des notions un peu plus avancées.<sup>4</sup>

## I-A-5. (Bonus) Et après ?

L'histoire ne s'arrête pas là ! Il existe encore d'autres systèmes de nombres qui vont au-delà des nombres réels.

Par exemple, au premier semestre, vous avez travaillé sur  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des nombres complexes. Les nombres complexes sont construits pour résoudre un problème de  $\mathbb{R}$  : certaines équations polynomiales n'ont pas de solutions. Par exemple,  $x^2 = -1$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . Dans  $\mathbb{C}$ , toutes les équations polynomiales ont une solution : l'équation précédente admet  $i$  et  $-i$  comme solutions, par exemple.

<sup>2</sup> Dans la phrase qui suit,  $x$  est introduit après  $\epsilon$ , donc  $x$  peut dépendre de  $\epsilon$ , mais pas l'inverse !

<sup>3</sup> Tout cela fait de  $\mathbb{R}$  un « corps ordonné complet ». Une notion compliquée !

<sup>4</sup> Pour plus d'informations voir : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction\\_des\\_nombres\\_réels](https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_réels)

Bien sûr, il faut continuer à faire des compromis, et ce qu'on gagne d'un côté, on le perd de l'autre... Il n'est plus possible d'ordonner l'ensemble des nombres complexes d'une manière qui soit compatible avec la multiplication. Qui, de  $-1 + 3i$  ou de  $2 - 5i$  est le plus grand ? Cette question n'a pas beaucoup de sens. Plus formellement, si on avait réussi à ordonner l'ensemble des nombres complexes, alors on aurait soit  $i > 0$ , soit  $i < 0$ . Mais les deux cas mènent à une absurdité : par la règle des signes, dans les deux cas on aurait  $i \times i > 0$  (si  $i$  est positif, alors c'est le produit de deux nombres positifs ; si  $i$  est négatif, alors c'est le produit de deux nombres négatifs, et « moins et moins égale plus »). Mais comme  $i^2 = -1 < 0$ , on arrive à une contradiction.

Il existe encore d'autres systèmes de nombres au-delà de  $\mathbb{C}$ . On peut citer l'exemple des quaternions  $\mathbb{H}$ , un système de nombres inventé par Hamilton et qui contient trois « unités imaginaires »  $i, j, k$  qui vérifient la relation :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Les quaternions servent notamment à représenter des transformations isométriques de l'espace tridimensionnel. Mais on perd encore une propriété : la multiplication n'est plus commutative, car  $ij = k$  alors que  $ji = -k$ . On peut continuer à aller plus loin en définissant les octonions, puis les sédénions, etc. À chaque étape, on perd et on gagne des propriétés.

Dans une tout autre direction, on peut considérer des systèmes de nombres qui n'ont qu'un nombre fini d'éléments. Vous en connaissez déjà un ! Il y a 24 heures dans une journée. On peut les additionner entre elles, et quand on dépasse 24, on a fait une journée complète et on retire 24h pour revenir dans la gamme  $\{0, \dots, 23\}$ . En d'autres termes, on calcule « modulo 24 ».

## Section I-B. Partie entière – Densité de $\mathbb{Q}$

### I-B-1. Corps archimédien

Les corps  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  vérifient la propriété suivante. Cette propriété signifie essentiellement que l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels n'est pas majoré. Deux nombres quelconques ont donc toujours des ordres de grandeur « comparables », car on peut toujours multiplier l'un par un entier pour dépasser l'autre.

**Théorème (Propriété archimédienne).** Soit  $\epsilon > 0$  un nombre rationnel (resp., réel)<sup>5</sup> et  $A > 0$  un nombre rationnel (resp., réel) quelconques. Alors il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ fois}} \geq A.$$

En résumé, on a la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \times \epsilon \geq A.$$

Cela signifie qu'aussi petit que le nombre  $\epsilon$  soit et aussi grand que  $A$  soit, on peut toujours arriver à dépasser  $A$  en ajoutant  $\epsilon$  avec lui-même suffisamment de fois.

*Démonstration (par l'absurde).* Supposons que  $\mathbb{R}$  n'est pas archimédien. Il existe donc  $\epsilon > 0$  et  $A > 0$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, n\epsilon < A \Rightarrow n < A/\epsilon$ . L'ensemble  $\mathbb{N}$  est donc majoré par  $A/\epsilon$ . Comme il est non vide, il a donc une borne supérieure  $\alpha = \sup \mathbb{N}$ . Par définition de la borne supérieure,  $\alpha - 1$  n'est pas un majorant de  $\mathbb{N}$  (car  $\alpha$  est son plus petit majorant). Il existe donc  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha - 1 < n_0$ . Mais alors,  $\alpha < n_0 + 1$  et  $n_0 + 1$  est un entier. Cela contredit le fait que  $\alpha$  est un majorant de l'ensemble  $\mathbb{N}$ . ■

**Corollaire.** On a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} < \epsilon.$$

<sup>5</sup> Ici, on utilise le mot « respectivement » (abrégé par « resp. ») pour signifier qu'il y a en fait deux théorèmes : un premier pour  $\mathbb{Q}$  et un autre pour  $\mathbb{R}$ . Le premier théorème se lit en ignorant ce qu'il y a entre les parenthèses. Le second se lit en remplaçant le mot « rationnel » par le mot « réel » partout où c'est nécessaire.

C'est pratique pour démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$ .

## I-B-2. Partie entière

On cherche maintenant à définir la partie entière d'un nombre. Informellement, la partie entière d'un nombre  $x$  est l'entier qui est obtenu en « oubliant les chiffres après la virgule » de  $x$ . Encore faut-il démontrer que ce nombre existe et est unique !

**Théorème.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  un nombre réel. Il existe un unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$n_0 \leq x < n_0 + 1.$$

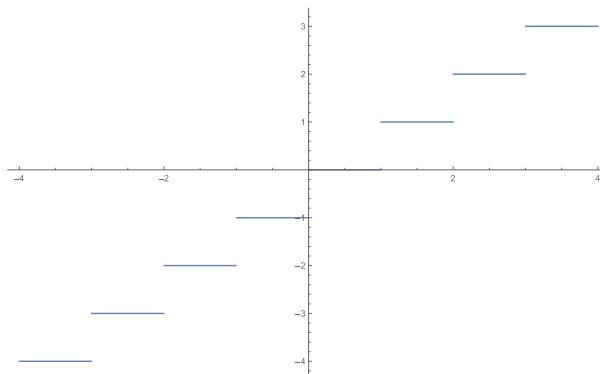
*Démonstration.* Commençons par nous intéresser au cas  $x \geq 0$  (le cas  $x \leq 0$  se traite de façon similaire). On définit l'ensemble :

$$A = \{n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n \leq x\}.$$

Par la propriété archimédienne, il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N > x$ . L'ensemble  $A$  est donc inclus dans  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$  qui est fini. De plus,  $A$  est non vide car  $0 \in A$ . Un ensemble fini de nombres naturels a toujours un maximum. On pose  $n_0 = \max A$ . Par définition,  $n_0 \in A$  donc  $n_0 \leq x$ . De plus,  $n_0 + 1 > n_0 = \max A$  donc  $n_0 + 1 \notin A$  et donc  $n_0 + 1 > x$ . En conclusion, on a bien  $n_0 \leq x < n_0 + 1$ . ■

**Définition.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  un nombre réel. L'unique entier  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $n_0 \leq x < n_0 + 1$  s'appelle la *partie entière* de  $x$  et est noté  $E(x)$  ou  $\lfloor x \rfloor$ .

Par exemple,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ . Attention aux nombres négatifs, on a par exemple  $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$ . Le graphe de la fonction  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  ressemble à :



## I-B-3. Densité de $\mathbb{Q}$

Pour finir, attelons-nous à la démonstration d'une propriété de  $\mathbb{Q}$ . Intuitivement, cette propriété dit qu'on peut approximer n'importe quel nombre par des nombres rationnels, et ce avec autant de précision que l'on souhaite.

*Exemple.* Considérons le nombre  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ . Nous avons démontré auparavant qu'il n'est pas rationnel. Cependant, on peut l'approcher par des nombres rationnels qui sont aussi proches que l'on souhaite. Par exemple on peut l'approcher au  $1/10^{\text{ème}}$  près par 1,4, ou bien au  $1/10^{\text{ème}}$  près par 1,41, ou encore au  $1/1000^{\text{ème}}$  par 1,414, etc.

Plus précisément, on introduit la notion suivante (voir aussi le chapitre suivant), qui nous dira qu'il n'y a pas de « gros trou » dans  $\mathbb{Q}$ .

**Définition.** Soit  $X \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. On dit que  $X$  est *dense* si pour tous  $a < b \in \mathbb{R}$ , il existe  $x \in X$  avec  $a < x < b$  (ou, de façon équivalente,  $]a, b[ \cap X \neq \emptyset$ ).

*Exemples.* Donnons quelques exemples de cette notion.

1. Le sous-ensemble  $X = \mathbb{R}$  est dense dans lui-même. Si  $a < b \in \mathbb{R}$  sont des réels, alors on peut simplement choisir  $x = \frac{a+b}{2}$  qui est bien compris entre  $a$  et  $b$ .
2. Le sous-ensemble  $X = \mathbb{R}^*$  est aussi dense. Supposons que  $a < b \in \mathbb{R}$  sont des réels. On peut choisir  $x = \frac{a+b}{2}$ , mais il est possible que  $x$  soit nul. Dans ce cas, on doit choisir une autre valeur de  $x$ , par exemple  $\frac{a+2b}{3}$ .
3. Le sous-ensemble  $X = \mathbb{R} \setminus [1, 2]$  n'est pas dense dans  $\mathbb{R}$  : il y a un trou entre les nombres  $a = 1$  et  $b = 2$ .

**Théorème.** Le sous ensemble  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $a < b$  deux nombres réels. Pour simplifier, supposons que  $0 < a$  ; sinon, on peut faire la même démonstration en faisant un peu plus attention aux signes. On pose alors le nombre  $\epsilon = b - a > 0$ . Grâce à la propriété archimédienne, on peut donc trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Définissons donc  $m = \lfloor na \rfloor$ . Cet entier vérifie :

$$m \leq na < m + 1 \Leftrightarrow a < \frac{m+1}{n} < b.$$

On a donc trouvé un rationnel,  $(m+1)/n \in \mathbb{Q}$ , qui est dans l'intervalle  $]a, b[$ . ■

**Corollaire.** Le sous-ensemble  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  deux réels tels que  $a < b$ . Alors  $a + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$ . Comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , on peut trouver un rationnel  $\frac{p}{q}$  tel que  $a + \sqrt{2} < p/q < b + \sqrt{2}$ . Mais alors  $p/q - \sqrt{2}$  est un irrationnel compris entre  $a$  et  $b$ . ■

## Chapitre II. Topologie de $\mathbb{R}$

La topologie est un vaste domaine des mathématiques qui est à la croisée de nombreux sujets d'études : l'analyse, la topologie algébrique, la topologie différentielle, ou encore la topologie géométrique. Dans ce cours, nous nous intéressons à l'étude de la topologie de la droite réelle  $\mathbb{R}$ , qui sert de fondation et de motivation à l'étude de la topologie d'espaces plus généraux.

La question fondamentale à laquelle nous allons chercher à répondre est celle de la définition des notions de limite et de continuité. Que signifient ces mots ? Intuitivement, on a tendance à penser qu'une fonction  $f$  tend vers une limite  $l$  en  $x \rightarrow x_0$  quand elle se « rapproche » de cette limite  $l$  à mesure que  $x$  se rapproche de  $x_0$ . Et une fonction est continue quand deux points qui sont proches sont envoyés sur deux points qui sont proches. Mais qu'est-ce que « rapproche » et « proche » signifie ? Vous avez appris au premier semestre que formaliser mathématiquement les notions de « limite » et « continuité » est plus ardu qu'il n'y paraît !

Nous ne pouvons pas nous fier à des mesures arbitraires : ce qui peut nous paraître proche peut s'avérer très éloigné d'un autre point de vue ou à une autre échelle. Une souris peut nous paraître petite, mais elle est géante comparée à une bactérie ; et la bactérie elle-même est énormément plus grande qu'un électron... Dans ce chapitre, nous allons donc d'abord commencer par donner un sens à la notion de « proche ». Pour cela, nous allons définir ce qui se nomme une « topologie » sur  $\mathbb{R}$ .

### Section II-A. Ouverts

Une topologie est constituée en premiers lieux de sous-ensembles désignés « ouverts ». Voyons comment les définir.

#### II-A-1. Voisinages

**Définition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  un réel quelconque et  $r > 0$  un réel strictement positif. La *boule ouverte*<sup>6</sup> de centre  $a$  et de rayon  $r$  est définie comme étant :

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}.$$

**Proposition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$  deux réels. Alors :

$$x \in B(a, r) \Leftrightarrow x \in ]a - r, a + r[ \Leftrightarrow a - r < x < a + r.$$

*Exemple.* Soit  $a = 4$  et  $r = 1$ . La boule ouverte  $B(4, 1)$  est l'intervalle  $]3, 5[$ .

**Proposition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  un réel et  $r, s > 0$  deux rayons. Alors :

$$B(a, r) \subset B(a, s) \Leftrightarrow r \leq s.$$

**Définition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  un réel quelconque. Soit  $V \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. On dit que  $V$  est un *voisinage* de  $a$  si  $V$  contient une boule ouverte centrée en  $a$ .

Un ensemble  $V$  est donc un voisinage de  $a$  s'il existe un réel  $r > 0$  tel que  $]a - r, a + r[ \subset V$ . En particulier, si  $V$  est un voisinage de  $a$ , alors  $a \in V$ . Une manière utile de penser aux voisinages est la suivante : «  $V$  est un voisinage de  $a$  si  $V$  contient tous les éléments suffisamment proches de  $a$  ». Mais formellement, c'est le contraire qui se passe : on définit d'abord les voisinages, et ce sont eux qui fixent la notion de « proche », pas le contraire.

<sup>6</sup> On pourrait se demander pourquoi il est question d'une boule alors que c'est un intervalle. Il faut penser à la dimension supérieure : en dimension 2, la définition analogue donne un disque ouvert ; en dimension 3, c'est effectivement une boule.

*Exemple.* Soit  $a \in \mathbb{R}$  un réel quelconque. Alors  $V = \mathbb{R}$  est bien un voisinage de  $a$ , car il contient par exemple  $B(a, 1)$ .

*Exemple.* Soit  $V = ]0, 1[$ . Alors  $V$  est un voisinage de n'importe quel  $a \in V$ . Pour trouver le rayon de la boule qui convient, on a deux possibilités :

1. Si  $a \leq 1/2$ , choisissons  $r = a$ . Alors  $B(a, a) = ]0, 2a[$ . Comme  $a \leq 1/2$ , on a  $2a \leq 1$  et donc  $B(a, a) \subset ]0, 1[$ .
2. Si  $a \geq 1/2$ , on choisit plutôt  $r = 1 - a$ . Alors  $B(a, 1 - a) = ]2a - 1, 1[$ . Comme  $a \geq 1/2$ , on en déduit que  $2a - 1 \geq 0$  et donc  $B(a, 1 - a) \subset ]0, 1[$ .

Plus généralement, on peut montrer de façon analogue qu'un intervalle ouvert est un voisinage de tous ses points. Cela inclut les intervalles ouverts du type  $]a, +\infty[$ ,  $]-\infty, a[$  ou encore  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

*Exemple.* En particulier, les boules ouvertes  $B(a, r)$  sont des voisinages de chacun de leurs points, car ce sont des intervalles ouverts.

Ce n'est pas forcément le cas des autres types d'intervalles.

*Exemple.* Soit  $V = [0, 1]$ . Soit  $a \in V$ . On a deux cas possibles :

3. Si  $0 < a < 1$ , alors  $V$  est un voisinage de  $a$ . La démonstration est similaire à la précédente.
4. Si  $a = 0$  ou  $a = 1$ , alors  $V$  n'est pas un voisinage de  $a$ . Intéressons-nous au cas  $a = 0$  (le cas  $a = 1$  est similaire). Montrons qu'aucune boule ouverte centrée en 0 n'est incluse dans  $V$ . Soit  $r > 0$  un rayon quelconque. Alors  $B(0, r) = ]-r, r[$  contient toujours des nombres négatifs, et ne peut donc pas être incluse dans  $V$ . Cela contredirait la définition de voisinage.

*Exemple.* Rappelons-nous que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , ce qui signifie que tout intervalle ouvert non-vide contient au moins un irrationnel. Cela entraîne que  $\mathbb{Q}$  n'est le voisinage d'aucun de ses points.

**Proposition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  un réel et  $V \subset W$  deux sous-ensembles. Si  $V$  est un voisinage de  $a$ , alors  $W$  est un voisinage de  $a$ .

La réciproque de cette proposition est bien sûr fausse.

## II-A-2. Sous-ensembles ouverts

**Définition.** Soit  $U \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $U$  est un *sous-ensemble ouvert* – ou encore que  $U$  est un *ouvert* – si  $U$  est un voisinage de chacun de ses points.

La proposition suivante découle directement de la définition.

**Proposition.** Un sous-ensemble  $U$  est ouvert si, et seulement si,

$$\forall x \in U, \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset U.$$

En d'autres termes, pour chaque point  $x \in U$ , il existe une boule ouverte centrée en  $x$  qui est incluse dans  $U$ . Le rayon de la boule peut bien sûr dépendre de  $x$  et de  $U$ .

*Exemple.* Comme on l'a vu auparavant, un intervalle ouvert est un voisinage de chacun de ses points. Les intervalles ouverts sont donc ouverts. Ouf ! En particulier, les boules ouvertes sont des ouverts...

*Exemple.* L'intervalle  $[0, 1]$  n'est en revanche pas ouvert. En effet, ce n'est pas un voisinage de tous ses points : ce n'est ni un voisinage de 0, ni un voisinage de 1.

*Exemple.* L'ensemble  $\mathbb{Q}$  n'est pas ouvert. En fait, ce n'est un voisinage d'aucun de ses points. En effet, si  $x \in \mathbb{Q}$ , alors n'importe quelle boule ouverte  $B(x, r)$  avec  $r > 0$  contient au moins un



irrationnel (car  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ) et ne peut donc pas être incluse dans  $\mathbb{Q}$ . Un argument similaire montre que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  n'est pas ouvert non plus.

*Exemple.* L'ensemble  $\mathbb{R}$  lui-même est un ouvert (c'est un intervalle ouvert). Mais l'ensemble vide  $\emptyset$  est aussi un ouvert ! Comme il ne contient aucun point, l'énoncé « quel que soit le point  $x \in \emptyset$  que l'on choisit, on peut trouver un rayon  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \emptyset$  » est trivialement vrai. Qu'importe que la conclusion ne soit jamais vérifiée : comme on ne peut de toute manière pas choisir de point  $x \in \emptyset$ , on n'a jamais besoin de vérifier que  $B(x, r) \subset \emptyset$ .

*Exemple.* Tous les ouverts ne sont pas des intervalles. L'ensemble  $V = ]0, 1[ \cup ]2, 3[$  est ouvert.

En fait, on peut construire de nombreux exemples d'ouverts à l'aide des deux résultats suivants.

**Théorème (« une réunion quelconque d'ouverts est ouverte »).** Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  une famille d'ouverts indexée par un ensemble  $I$  quelconque (finie ou infinie). Alors la réunion  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert.

*Démonstration.* Considérons une famille  $\{U_i\}$  comme dans l'énoncé et posons  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  sa réunion. Nous cherchons à démontrer que  $U$  est ouvert. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et supposons que  $x \in U$ . Il faut donc démontrer que  $U$  contient une boule ouverte centrée en  $x$ . Par définition de l'union, il existe un indice  $i \in I$  tel que  $x \in U_i$ . Or,  $U_i$  est ouvert, donc il contient une boule ouverte  $B(x, r)$  centrée en  $x$ . On a donc :

$$B(x, r) \subset U_i \subset U = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

L'ensemble  $U$  contient donc bien une boule centrée en  $x$ . ■

*Exemple.* Le sous-ensemble suivant est ouvert, car c'est une réunion (infinie) d'ouverts :

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] n, n + \frac{1}{2} \right[.$$

En fait, on peut démontrer que tous les ouverts s'écrivent sous cette forme.

**Proposition.** Soit  $U \subset \mathbb{R}$  un ouvert. Alors  $U$  est une réunion (potentiellement infinie) d'intervalles ouverts.

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}$  et supposons  $x \in U$ . Comme  $U$  est ouvert, c'est un voisinage de  $x$ , donc il existe une boule ouverte

$$B(x, r_x) = \left] x - r_x, x + r_x \right[ \subset U$$

Ici,  $r_x > 0$  qui est centrée en  $x$  et qui est incluse dans  $U$ . Alors on a :

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x).$$

En effet,  $U$  est clairement incluse dans la réunion car si  $x \in U$  alors  $x \in B(x, r_x)$ . L'inclusion réciproque vient du fait que  $B(x, r_x) \subset U$  pour tout  $x$ . ■

**Théorème (« une intersection finie d'ouverts est ouverte »).** Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  une famille d'ouverts indexée par un ensemble  $I$  qui est **fini**. Alors l'intersection  $\bigcap_{i \in I} U_i$  est un ouvert.

*Démonstration.* Posons  $U = \bigcap_{i \in I} U_i$  et soit  $x \in \mathbb{R}$  que l'on suppose appartenir à  $U$ . Par définition de l'intersection,  $x \in U_i$  quel que soit  $i \in I$ . Comme chaque  $U_i$  est ouvert, on en déduit qu'il existe des rayons (qui dépendent de  $i \in I$ ) notés  $r_i > 0$  tels que  $B(x, r_i) \subset U_i$ . Comme l'ensemble  $I$  est fini, il n'y a qu'un nombre fini de rayons à considérer, et on peut donc trouver le minimum  $r = \min_{i \in I} r_i$ . Comme  $r \leq r_i$  pour tout  $i \in I$ , on en déduit que  $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset U_i$  pour tout  $i \in I$ .

En utilisant à nouveau la définition de l'intersection, on conclut que  $B(x, r) \subset U$ . ■

*Exemple.* Soit  $U = ]2,5[$  et  $V = ]1,3[$  deux ouverts. Leur intersection est  $U \cap V = ]2,3[$  qui est effectivement ouverte.

*Exemple.* La condition que l'ensemble  $I$  soit fini est essentielle dans la proposition précédente. Voici un contre-exemple. Considérons  $I = \mathbb{N}^*$  et  $U_i = ]-1/i, 1/i[$ . En d'autres termes, on considère l'intersection :

$$U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} ]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[.$$

Cette intersection est caractérisée de la façon suivante. Si  $x \in \mathbb{R}$  est un réel, on a :

$$x \in U \Leftrightarrow \left( \forall i \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i} \right).$$

Montrons que  $U = \{0\}$ . D'une part, il est clair que 0 est bien compris entre  $-1/i$  et  $1/i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ . D'autre part, si  $x \in U$ , alors on peut raisonner par l'absurde pour démontrer que  $x = 0$ . Supposons  $x > 0$  (le cas  $x < 0$  est similaire). Par la propriété archimédienne, il existe  $i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $1/i < x$ . Cela contredit la définition de  $U$ .

On en conclut que  $U = \{0\}$ , et ce singleton n'est pas un ensemble ouvert. Or,  $\{0\}$  n'est pas ouvert. S'il l'était, il devrait contenir une boule ouverte centrée en  $a = 0$ , ce qui n'est pas le cas.

### II-A-3. Ouverts et limites de suites

Rappelons la définition de limite de suite vue au premier semestre.

**Définition.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle et soit  $l \in \mathbb{R}$  un réel. On dit que  $(u_n)$  converge vers  $l$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon. \quad (*_1)$$

On lit cette phrase de la façon suivante : « quel que soit  $\epsilon > 0$ , il existe un rang ( $N \in \mathbb{N}$ ) à partir duquel ( $n \geq N$ ) la suite vérifie  $|u_n - l| < \epsilon$  ». Si  $(*_1)$  est vérifiée, on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l, \text{ ou encore } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l.$$

La conclusion de l'implication dans  $(*_1)$  est équivalente aux énoncés suivants :

$$|u_n - l| < \epsilon \Leftrightarrow l - \epsilon < u_n < l + \epsilon \Leftrightarrow u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[ \Leftrightarrow u_n \in B(l, \epsilon).$$

On en arrive donc à la proposition suivante, qui dit que l'on peut savoir si une suite converge vers une limite en s'intéressant aux *voisinages* plutôt qu'aux boules.

**Proposition.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle et  $l \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \in V. \quad (*_2)$$

On lit l'énoncé  $(*_2)$  de la façon suivante : « quel que soit le voisinage  $V$  de  $l$ , il existe un rang  $N$  tel que si  $n$  est un entier au moins égal au rang  $N$ , alors  $u_n \in V$  ». En forme raccourcie, on peut aussi lire « quel que soit le voisinage de  $l$ , il existe un rang à partir duquel la suite appartient à ce voisinage ». Si l'on imagine qu'un voisinage de  $l$  définit une notion de « proche de  $l$  », alors l'énoncé  $(*_2)$  dit que quelle que soit le niveau de précision que l'on demande, la suite  $u_n$  finit par atteindre ce niveau de précision et ne le quitte plus<sup>7</sup>.

*Démonstration.* Il s'agit de démontrer une équivalence, donc une double implication.

1. Supposons d'abord que  $(*_2)$  est vraie et démontrons que  $\lim u_n = l$ . Soit  $\epsilon > 0$ . On cherche à démontrer qu'à partir d'un certain rang  $N \in \mathbb{N}$ , la suite  $u_n$  appartient à la boule

<sup>7</sup> Attention ! Il est tout à fait possible que la suite rentre dans le voisinage  $V$ , en sorte, y rentre à nouveau... Ce qui est important, c'est qu'il existe un rang à partir duquel la suite rentre dans le voisinage et n'en sorte plus jamais.

$B(l, \epsilon)$ . Or, la boule  $B(l, \epsilon)$  est un voisinage de  $l$ , donc en utilisant  $(*_2)$ , on sait qu'un tel rang existe.

- Supposons maintenant que  $\lim u_n = l$ . Soit  $V$  un voisinage de  $l$ . On cherche un rang à partir duquel la suite appartient à  $V$ . Or, par définition d'un voisinage, il existe un rayon  $r > 0$  tel que  $B(l, r) \subset V$ . En utilisant  $(*_1)$ , on sait qu'il existe un rang  $N$  tel que  $u_n \in B(l, r)$  pour  $n \geq N$ . Comme  $B(l, r) \subset V$ , on en déduit que  $u_n \in V$  pour  $n \geq N$ . ■

On peut prendre  $(*_2)$  comme une définition alternative de la notion de limite de suite. Il en existe une troisième, dont la démonstration est très similaire à la précédente (il faut utiliser le fait que  $B(l, \epsilon)$  est ouverte, pas juste un voisinage de  $l$ ) :

**Proposition.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle et  $l \in \mathbb{R}$  un réel. Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  si, et seulement si,

$$\forall U \text{ ouvert contenant } l, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \in U. \quad (*_3)$$

## II-A-4. Intérieur

Nous avons vu précédemment que tous les ensembles ne sont pas ouverts. Par exemple, l'intervalle  $[0, 1]$  n'est pas ouvert, car ce n'est pas un voisinage de ses éléments 0 et 1. Parmi les points de  $[0, 1]$ , on peut donc en distinguer deux types : ceux dont  $[0, 1]$  est un voisinage, et ceux dont  $[0, 1]$  n'est pas un voisinage.

**Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. On dit que  $x \in \mathbb{R}$  est un *point intérieur* de  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $x$ .

En d'autres termes,  $x$  est un point intérieur de  $A$  si et seulement s'il existe un rayon  $r > 0$  tel que la boule  $B(x, r)$  soit entièrement contenue dans  $A$ . On remarquera qu'un point intérieur de  $A$  appartient bien à  $A$  (car  $x \in B(x, r)$  pour tout  $r$ ).

**Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. L'*intérieur* de  $A$  est l'ensemble de ses points intérieurs. On le note  $A^\circ$  ou  $\text{int}(A)$ .

*Exemple.* L'intérieur de  $[0, 1]$  est l'intervalle ouvert  $\text{int}([0, 1]) = ]0, 1[$ .

*Exemple.* L'ensemble  $\mathbb{Q}$  n'est un voisinage d'aucun de ses points (voir ci-dessus). On en déduit que l'intérieur de  $\mathbb{Q}$  est vide,  $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ .

La démonstration de la proposition suivante découle directement de la définition.

**Proposition.** Un sous-ensemble  $U \subset \mathbb{R}$  est ouvert si et seulement s'il est égal à son propre intérieur, c'est-à-dire :

$$U \text{ est ouvert} \Leftrightarrow U = U^\circ.$$

*Démonstration.* Supposons que  $U$  est ouvert. Alors  $U$  est un voisinage de chacun de ses points, donc  $U \subset U^\circ$ . De plus, on a remarqué que  $U^\circ \subset U$ .

Réciproquement, supposons que  $U = U^\circ$ . Alors quel que soit  $x \in U$ , on a  $x \in U^\circ$ , donc  $U$  est un voisinage de  $x$ . En résumé, on a donc bien que  $U$  est un voisinage de chacun de ses points et donc qu'il est ouvert. ■

**Théorème.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. Alors l'intérieur de  $A$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ , ce qui signifie que :

- L'ensemble  $A^\circ$  est un sous-ensemble ouvert inclus dans  $A$ , et :
- Si  $U \subset A$  est un sous-ensemble ouvert qui est inclus dans  $A$ , alors  $U \subset A^\circ$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer la première propriété. Tout d'abord, on a déjà vu que l'intérieur de  $A$  est inclus dans  $A$ . De plus, l'intérieur de  $A$  est ouvert. En effet, supposons  $x \in A^\circ$  pour un réel  $x$ . Montrons que  $A^\circ$  est un voisinage de  $x$ . Par définition de  $A^\circ$ , il existe un rayon  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ . Nous avons que  $B(x, r)$  est un ensemble ouvert, donc c'est un voisinage de

chacun de ses points. Comme  $B(x, r) \subset A$ , on en déduit que  $A$  est aussi un voisinage de chacun des points de  $B(x, r)$ . Donc par définition de l'intérieur, les points de  $B(x, r)$  sont bien dans l'intérieur de  $A$ . On en déduit que  $B(x, r) \subset A^\circ$  et donc que  $A^\circ$  est un voisinage de  $x$ .

Montrons maintenant la deuxième propriété. Soit  $U \subset A$  un sous-ensemble inclus dans  $A$  qui est ouvert. Montrons qu'il est inclus dans  $A^\circ$ . Soit  $x \in U$  un point quelconque. Comme  $U$  est ouvert, il existe un rayon  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U \subset A$ , donc  $A$  est bien un voisinage de  $x$ . On en déduit donc que  $x \in A^\circ$ . ■

**Corollaire.** Soit  $A \subset B$  deux sous-ensembles emboîtés. Alors  $A^\circ \subset B^\circ$ .

Enfin, voici une autre caractérisation de l'intérieur d'un ensemble :

**Corollaire.** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Son intérieur est la réunion des ouverts contenus dans  $A$ , c'est-à-dire :

$$A^\circ = \bigcup_{U \subset A; \text{ouvert}} U.$$

*Démonstration.* Il s'agit de montrer une double inclusion. D'une part,  $A^\circ$  est un ouvert qui est contenu dans  $A$ , il est donc inclus dans l'union du côté droit de l'équation. D'autre part, si  $U \subset A$  est un ouvert, alors en utilisant le théorème précédent, on a  $U \subset A^\circ$ . ■

## Section II-B. Fermés

Passons maintenant à l'autre aspect de la topologie de  $\mathbb{R}$  : les ensembles fermés.

### II-B-1. Sous-ensembles fermés

**Définition.** Soit  $X \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. Son *complémentaire* est le sous-ensemble :

$$X^c = \mathbb{R} \setminus X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin X\}.$$

**Définition.** Un sous-ensemble  $F \subset \mathbb{R}$  est *fermé* si son complémentaire  $\mathbb{R} \setminus F$  est ouvert.

*Exemple.* Le sous-ensemble  $[0, 1]$  est fermé, car son complémentaire est la réunion de  $] -\infty, 0[$  et de  $]1, +\infty[$  et est donc ouvert. Plus généralement, les intervalles fermés sont fermés. Ouf ! En particulier, on peut noter que les singletons<sup>8</sup> sont fermés.

*Exemple.* Le sous-ensemble  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  est fermé. En effet, son complémentaire est une réunion (infinie, mais peu importe) d'intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = ]-\infty, 0[ \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]n, n+1[.$$

*Exemple.* Le sous-ensemble  $[0, 1[$  n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas un voisinage de 1 et n'est donc pas ouvert. Notons qu'il n'est pas non plus ouvert ! Un ensemble peut donc n'être ni fermé, ni ouvert !

*Exemple.* Le sous ensemble  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$  est fermé, car son complémentaire  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$  est ouvert. Et de la même manière  $\emptyset$  est fermé car son complémentaire  $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$  est ouvert. Un ensemble peut donc être à la fois fermé et ouvert !

Vous verrez cependant plus tard que les seuls exemples de parties qui sont à la fois ouvertes et fermées dans  $\mathbb{R}$  sont justement  $\mathbb{R}$  et  $\emptyset$ . Cela vient du fait que  $\mathbb{R}$  est un espace topologique *connexe*, ce qui signifie intuitivement qu'il est en un seul morceau.

En reprenant les démonstrations des théorèmes analogues pour les ensembles ouverts, on en arrive très vite aux deux résultats suivants. Pour les démontrer, il faut utiliser les deux formules

<sup>8</sup> C'est-à-dire les ensembles qui ne contiennent qu'un seul élément,  $\{a\} = [a, a]$ .

suivantes qui lient complémentaire, union et intersection (et font écho aux lois de Morgan en logique). Quel que soit  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , on a :

$$\mathbb{R} \setminus (X \cup Y) = (\mathbb{R} \setminus X) \cap (\mathbb{R} \setminus Y), \quad \mathbb{R} \setminus (X \cap Y) = (\mathbb{R} \setminus X) \cup (\mathbb{R} \setminus Y).$$

On peut également généraliser ces égalités à des réunions et intersections quelconques. On obtient alors :

**Théorème (« une intersection quelconque de fermés est fermée »).** Soit  $\{F_i\}_{i \in I}$  une famille de fermés  $F_i \subset \mathbb{R}$  indicée par un ensemble  $I$  quelconque. Alors l'intersection  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  est fermée.

**Théorème (« une union finie de fermés est fermée »).** Soit  $\{F_i\}_{i \in I}$  une famille de fermés  $F_i \subset \mathbb{R}$  indicée par un ensemble  $I$  que l'on suppose être fini. Alors la réunion  $F = \bigcup_{i \in I} F_i$  est fermée.

Attention ! Comme pour une intersection d'ouverts, seules les unions *finies* de fermées sont assurées d'être fermées. Si l'on considère une infinité d'ensembles fermés, alors leur réunion peut ne pas être fermée.

*Exemple.* La réunion de fermées suivante n'est pas fermée :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1[.$$

## II-B-2. Fermés et limites de suite

Donnons maintenant la propriété qui relie les limites de suite au fait que les ensembles sont fermés, et qui est en un sens complémentaire à la propriété sur les ouverts et les limites de suites.

**Proposition.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $F \subset \mathbb{R}$ . Supposons que  $F$  est un sous-ensemble fermé et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ . Alors  $l \in F$ .

En d'autres termes, si une suite d'éléments d'un fermé converge, alors la limite appartient à ce fermé. Attention, bien entendu, toutes les suites qui prennent leur valeur dans un ensemble fermé ne convergent pas !

*Démonstration.* Supposons (par l'absurde) que  $l \notin F$ . Alors  $l \in \mathbb{R} \setminus F$ . Comme  $F$  est fermé, son complémentaire est ouvert, et la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  appartient à cet ouvert. En utilisant la propriété de la section « Ouverts et limites de suites », on en déduit qu'il existe un rang à partir duquel la suite reste donc dans  $\mathbb{R} \setminus F$ . Cela contredit le fait que la suite est composée d'éléments de  $F$ . ■

*Exemple d'application.* Supposons que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite qui converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$  et que tous les éléments de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  sont des entiers naturels. Alors  $l$  est aussi un entier, car  $\mathbb{N}$  est fermé (voir ci-dessus).

## II-B-3. Adhérence

Passons maintenant à la partie complémentaire de la notion d'intérieur d'un ensemble.

**Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble et soit  $x \in \mathbb{R}$  un réel. On dit que  $x$  est un *point adhérent* à  $A$ , ou encore que  $x$  *adhère* à  $A$ , si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

En d'autres termes,  $x$  adhère à  $A$  si toute boule ouverte centrée en  $x$  contient un élément de  $A$ , si petite qu'elle soit.

*Exemple.* Soit  $A$  un sous-ensemble. Alors tous les  $a$  qui sont dans  $A$  adhèrent à  $A$ , car quel que soit  $\epsilon > 0$ , la boule ouverte  $B(a, \epsilon)$  contient  $a$  qui est aussi un élément de  $A$ .

*Exemple.* Soit  $A = ]0, 1[$ . Alors 1 est un point adhérent à  $A$ . En effet, si  $\epsilon > 0$  est un réel, posons  $\epsilon' = \min(\epsilon, 1)$ . La boule ouverte  $B(1, \epsilon)$  contient  $1 - \epsilon'/2$  qui est un élément de  $A$ .

**Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. L'ensemble des points adhérents à  $A$  s'appelle l'adhérence de  $A$  et est notée  $\bar{A} = \text{adh}(A)$ .

*Exemple.* L'adhérence de  $\mathbb{Q}$  est  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , car  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

En calquant le théorème similaire sur l'intérieur d'un sous-ensemble, on obtient :

**Théorème.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. L'adhérence de  $A$  est le plus petit fermé qui contient  $A$ , c'est-à-dire :

1. Le sous-ensemble  $\bar{A}$  est fermé et il contient  $A$ , et :
2. Si  $F \subset \mathbb{R}$  est un sous-ensemble fermé et si  $A \subset F$ , alors  $\bar{A} \subset F$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà vu que  $\bar{A}$  contient  $A$ . Montrons que  $\bar{A}$  est fermé, c'est-à-dire que  $\mathbb{R} \setminus \bar{A}$  est ouvert. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{A}$  un élément qui n'est pas dans l'adhérence de  $A$ . Alors par définition, il existe une boule ouverte  $B(x, \epsilon)$  (où  $\epsilon > 0$ ) telle que  $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$ , en d'autres termes,  $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$ .

Nous voudrions montrer que  $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \bar{A}$ , donc posons  $y \in B(x, \epsilon)$ . Comme  $B(x, \epsilon)$  est ouvert, il existe un rayon  $\epsilon' > 0$  tel que  $B(y, \epsilon') \subset B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$  et donc  $B(y, \epsilon') \cap A = \emptyset$ . Nous en concluons donc que  $y \notin \bar{A}$ . On a donc bien montré que  $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \bar{A}$ . En résumé, le complémentaire de  $\bar{A}$  est donc un voisinage de chacun de ses points  $x$ . On en déduit donc que  $\mathbb{R} \setminus \bar{A}$  est ouvert, et donc que  $\bar{A}$  est fermé.

Montrons maintenant la deuxième propriété. Soit  $F$  un sous-ensemble fermé qui contient  $A$ . Montrons qu'il contient aussi  $\bar{A}$ . Raisonnons par contraposée : soit  $x \notin F$ , nous allons montrer que  $x \notin \bar{A}$ . Comme  $x \notin F$  et que  $F$  est fermé, il existe un rayon  $\epsilon > 0$  tel que  $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus F$ , ce qui implique que  $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$  et donc que  $x \notin \bar{A}$ . ■

À partir de ce théorème, on peut déduire plusieurs propriétés bien utiles.

**Corollaire.** Soit  $A \subset B$  deux ensembles emboîtés. Alors  $\bar{A} \subset \bar{B}$ .

*Démonstration.* L'adhérence  $\bar{B}$  est un ensemble fermé qui contient  $B$ . Il contient donc à fortiori  $A \subset B$ . D'après le théorème, il contient donc  $\bar{A}$ . ■

En recopiant les démonstrations analogues pour l'intérieur, on arrive à :

**Corollaire.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. Alors :

$$A \text{ est fermé} \Leftrightarrow A = \bar{A}.$$

**Corollaire.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. L'adhérence de  $A$  est l'intersection des fermés qui contiennent  $A$ , c'est-à-dire :

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F; F \text{ fermé}} F.$$

Nous en déduisons la proposition suivante qui lie intérieur et adhérence.

**Proposition (« l'adhérence du complémentaire est le complémentaire de l'intérieur, et vice-versa »).** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. Alors nous avons les égalités suivantes d'ensembles :

$$\overline{\mathbb{R} \setminus A} = \mathbb{R} \setminus (A^\circ), \quad (\mathbb{R} \setminus A)^\circ = \mathbb{R} \setminus \bar{A}.$$

## Section II-C. Autres notions

### II-C-1. Parties séquentiellement fermées

Nous avons vu dans la section « Fermés et limites de suite » que si  $F$  est fermé, alors pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $F$  qui admet une limite, cette limite est toujours dans  $F$ . Dans cette section, nous démontrons qu'il y a une réciproque à ce résultat.

**Théorème (Caractérisation séquentielle des ensembles fermés).** Soit  $F \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. Supposons que pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $F$ , si  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge, alors  $\lim u_n \in F$ . Alors  $F$  est fermé.

*Démonstration.* On sait que  $\bar{F}$  est fermé. Il nous suffit donc de montrer que  $F = \bar{F}$  pour conclure que  $F$  est fermé. Comme on sait déjà que  $F \subset \bar{F}$ , il suffit en fait de démontrer que  $\bar{F} \subset F$  pour terminer la démonstration.

Supposons que  $x \in \bar{F}$  adhère à  $F$ . Nous allons construire une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $x$ . En utilisant l'hypothèse sur  $F$ , on pourra donc en déduire que  $x \in F$ . Cette suite  $(u_n)$  est construite par étapes :

1. On commence par noter que  $B(x, 1) \cap F \neq \emptyset$ , car  $x$  adhère à  $F$ . Il existe donc un élément  $u_0 \in B(x, 1) \cap F$ . Cet élément vérifie donc deux propriétés :  $|x - u_0| < 1$  et  $u_0 \in F$ .
2. De la même manière,  $B(x, 1/2) \cap F \neq \emptyset$ , donc on peut choisir un élément  $u_1 \in B(x, 1/2) \cap F$ . Cet élément est toujours un élément de  $F$ , et  $|x - u_1| < 1/2$ .
3. En continuant, on peut construire  $u_2 \in F$  tel que  $|x - u_2| < 1/3$ , puis  $u_3 \in F$  tel que  $|x - u_3| < 1/4$ , etc.

Finalement, on a donc une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $F$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x - u_n| < \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{n+1} < u_n < x + \frac{1}{n+1}.$$

En utilisant le théorème des gendarmes<sup>9</sup>, on en déduit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $x$ . On a donc bien construit une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $F$  qui converge vers  $x$ , donc en utilisant l'hypothèse sur  $F$ , on en déduit que  $x \in F$ . Finalement, on conclut donc bien que  $F = \bar{F}$  et donc que  $F$  est fermé. ■

En fait, en recopiant peu ou prou la démonstration précédente, on peut démontrer la caractérisation suivante de l'adhérence d'un sous-ensemble :

**Proposition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble. Alors l'adhérence de  $A$  est donnée par l'ensemble des éléments  $x \in \mathbb{R}$  pour lesquels il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

$$\bar{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (u_n)_{n \geq 0} \text{ une suite telle que } \forall n, u_n \in A \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x \right\}.$$

### II-C-2. Bord

Nous avons vu qu'étant donné un ensemble  $A$ , tous ses points ne sont pas des points intérieurs, et toutes ses points adhérents ne sont pas dans  $A$ . Ces points sont regroupés dans le bord de  $A$  :

**Définition.** Le bord<sup>10</sup> d'un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  est l'ensemble des points de son adhérence qui ne sont pas dans son intérieur, c'est-à-dire :

$$\partial A = \bar{A} \setminus (A^\circ).$$

<sup>9</sup> Théorème vu au premier semestre, aussi appelé « théorème d'encadrement ». Il se démontre en utilisant la propriété archimédienne.

<sup>10</sup> On dit également « frontière » de  $A$ .

*Exemples.* Voici quelques exemples de bords de sous-ensembles.

1. Soit  $a < b$  deux réels. Alors :

$$\partial[a, b] = \partial]a, b[ = \partial]a, b[ = \partial]a, b[ = \{a, b\}.$$

Le bord d'un intervalle correspond donc à l'idée intuitive que l'on se fait du mot « bord ».

2. Le bord d'un singleton est lui-même :  $\partial\{a\} = \{a\}$ .
3. Le bord de  $\mathbb{R}$  est vide :  $\partial\mathbb{R} = \emptyset$ , car  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$ . De même,  $\partial\emptyset = \emptyset$ .
4. Le bord de  $\mathbb{Q}$  est  $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ . En effet, on a vu que l'adhérence de  $\mathbb{Q}$  est  $\mathbb{R}$  (car  $\mathbb{Q}$  est dense), alors que son intérieur est vide (car  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense).

On le voit sur ces exemples : il faudra faire attention à ne pas écrire de bêtises comme «  $A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B$  » (qui est faux) !

### II-C-3. Voisinages généralisés

Dans cette section, nous définissons deux notions plus générales de voisinage que celle vue au début d'une chapitre. Elles serviront toutes les deux plus tard à définir des limites : la première notion servira à définir des limites infinies et/ou des limites en l'infini, tandis que la seconde servira à définir des limites d'une fonction qui n'est pas définie sur un voisinage entier d'un point.

**Définition.** Soit  $V \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble.

1. On dit que  $V$  est un *voisinage de  $+\infty$*  s'il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $]A, +\infty[ \subset V$ .
2. On dit que  $V$  est un *voisinage de  $-\infty$*  s'il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $] -\infty, A[ \subset V$ .

*Exemple.* L'ensemble  $]0, +\infty[$  est un voisinage de  $+\infty$ , mais pas de  $-\infty$ .

Comme dans la section « Ouverts et limites de suites », on peut reformuler la définition de limite infinie d'une suite. Commençons par rappeler cette définition.

**Définition.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle. On dit que  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $+\infty$  (resp.,  $-\infty$ ) et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  (resp.,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ) si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n > A \quad (\text{resp., } u_n < A).$$

En recopiant la démonstration analogue pour le cas  $\lim u_n \in \mathbb{R}$ , on obtient :

**Proposition.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle et soit  $l \in \{+\infty, -\infty\}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \in V.$$

Enfin, concluons ce chapitre par la définition suivante, qui sera utile pour définir des limites de fonctions en des points qui ne sont pas dans l'intérieur du domaine de définition.

**Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble et soit  $x \in \bar{A}$  un point adhérent à  $A$ . Un *voisinage de  $x$  relatif à  $A$*  est un sous-ensemble  $V \subset \mathbb{R}$  tel que :

$$\exists \epsilon > 0, \quad B(x, \epsilon) \cap A \subset V.$$

*Exemple.* Soit  $A = \mathbb{R}$ . Alors un voisinage de  $x$  relatif à  $\mathbb{R}$  est tout simplement un voisinage de  $x$ .

*Exemple.* Soit  $A = \mathbb{R}^*$ . Notons que  $\bar{A} = \mathbb{R}$ , donc on peut considérer les voisinages relatifs de n'importe quel réel  $x \in \mathbb{R}$ . On a deux cas possibles :

1. Si  $x \neq 0$ , alors un voisinage de  $x$  relatif à  $\mathbb{R}^*$  est tout simplement un voisinage de  $x$ . En effet, un voisinage de  $x$  est clairement un voisinage relatif. Réciproquement, soit  $V$  un voisinage de  $x$  relativement à  $\mathbb{R}^*$ . Il existe donc un rayon  $\epsilon > 0$  tel que  $B(x, \epsilon) \setminus \{0\}$  soit inclus dans  $V$ . On peut remplacer le rayon  $\epsilon$  par un rayon plus petit, disons :

$$\epsilon' = \min(\epsilon, |x|).$$



Alors on a  $B(x, \epsilon') \setminus \{0\} = B(x, \epsilon')$  est toujours inclus dans  $V$  et donc  $V$  est bien un voisinage (« normal ») de  $x$ .

2. Un voisinage de  $x = 0$  relatif à  $\mathbb{R}^*$  est un sous-ensemble  $V \subset \mathbb{R}$  tel qu'il existe un rayon  $\epsilon > 0$  avec  $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subset V$ , c'est-à-dire  $]-\epsilon, 0[ \cup ]0, +\epsilon[ \subset V$ . Un voisinage de  $x = 0$  relatif à  $\mathbb{R}^*$  est donc un voisinage épointé de 0, comme dans la définition suivante.

**Définition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  un réel. Un *voisinage épointé* de  $a$  est un sous-ensemble  $V \subset \mathbb{R}$  telle qu'il existe un réel  $\epsilon > 0$  vérifiant :

$$]a - \epsilon, a[ \cup ]a, a + \epsilon[ \subset V.$$

*Exemple.* Soit  $A = [0, 1]$ . Un voisinage de 0 relatif à  $A$  est un sous-ensemble  $V \subset [0, 1]$  tel qu'il existe  $\epsilon > 0$  avec  $[0, \epsilon[ \subset V$ . De même, un voisinage de 1 relatif à  $A$  est un sous-ensemble  $V \subset [0, 1]$  qui contient un intervalle de la forme  $]1 - \epsilon, 1]$ .



## Chapitre III. Limites de fonctions

Dans ce chapitre, nous allons définir formellement la notion de limite d'une fonction en termes de voisinages. Comme pour les suites, il y a plusieurs cas à traiter suivant si la limite est finie ou infinie. Mais contrairement aux suites, il faut aussi définir la limite d'une fonction en un point, et pas juste en l'infini. Heureusement, avec la notion de voisinage (et de voisinage généralisé), nous pouvons donner une unique définition qui couvre tous les cas.

### Section III-A. Premières définitions

#### III-A-1. Limite finie d'une fonction en un point

Commençons par donner la définition habituelle de limite d'une fonction en un point.

**Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un sous ensemble et  $a \in \bar{A}$  un point adhérent<sup>11</sup> à  $A$ , soit  $l \in \mathbb{R}$  un réel, et soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f(x)$  tend<sup>12</sup> vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  (en restant dans  $A$ ) si, et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon. \quad (*_1)$$

Dans ce cas, on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = l, \text{ ou s'il n'y a pas d'ambiguïté sur } A, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

Cette définition est assez compliquée à comprendre. Listons donc quelques points d'intérêt.

1. Il faut bien faire attention à l'ordre des quantificateurs. Le quantificateur «  $\forall \epsilon$  » vient avant le quantificateur «  $\exists \delta$  ». Le nombre  $\delta$  peut donc dépendre de  $\epsilon$ , mais pas l'inverse !
2. Pour un  $\epsilon$  donné, on ne demande l'existence que d'un seul  $\delta$ . Il n'est pas nécessaire que toutes les valeurs de  $\delta$  fonctionnent.
3. Il y a un quantificateur «  $\forall x \in A$  ». Il faut donc vérifier l'implication pour toutes les valeurs de  $x \in A$ . On n'a pas besoin de s'occuper des valeurs de  $x$  qui ne sont pas dans  $A$ .
4. Enfin, comme l'implication a pour hypothèse «  $|x - a| < \delta$  », il ne faut en fait vérifier la conclusion «  $|f(x) - l| < \epsilon$  » que pour les valeurs de  $x$  qui sont proches de  $a$  (et qui sont dans  $A$ ).

*Remarque.* La notation  $\lim f(x) = l$  est potentiellement problématique tant qu'on n'a pas démontré que la limite est unique, ce que nous ferons dans la section [Comparaison des limites](#).

*Exemple.* On définit une fonction (cet exemple est volontairement simpliste) :

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + x^2 \sin x.$$

La valeur  $a = 0$  est bien un point adhérent à  $A = \mathbb{R}_+^*$ . On peut donc parler de la limite de  $f$  en 0. Nous allons démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Vous remarquerez que l'on n'a pas précisé  $x \in \mathbb{R}_+^*$  dans la notation. C'est implicite : comme  $f$  est déjà restreinte à cet ensemble de définition, on se permet de ne pas le préciser.

Il faut vérifier que l'énoncé  $(*_1)$  est vrai. Le premier quantificateur que l'on voit est  $\forall \epsilon$ . Supposons donc que  $\epsilon > 0$  est un réel strictement positif quelconque. Nous devons donc trouver un réel  $\delta > 0$  tel que l'on ait  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |x - 0| < \delta \implies |f(x) - 1| < \epsilon$ . Si l'on déballe les définitions, il faut donc trouver un réel  $\delta > 0$  tel que :

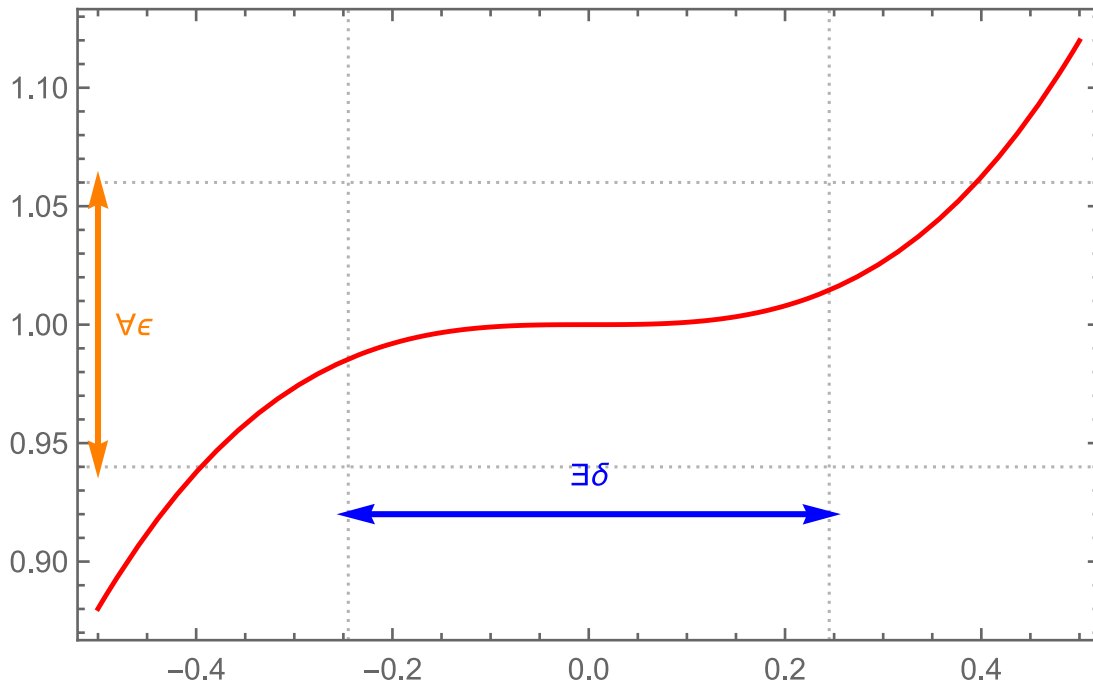
<sup>11</sup> Si  $a$  n'est pas un point adhérent à  $A$ , alors il n'y a pas de sens à donner à « la limite de  $f$  en  $a$  ».

<sup>12</sup> On peut aussi dire que  $f$  « converge » vers  $l$ .

$$x \in \underbrace{]-\delta, \delta[ \cap \mathbb{R}_+^*}_{=]0, \delta[} \Rightarrow x^2 |\sin x| < \epsilon.$$

C'est simple ! Comme on sait que  $|\sin x| \leq 1$  (propriété bien connue de la fonction sinus), il nous suffit de choisir  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ . La propriété est alors bien vérifiée : si on sait que  $0 < x < \delta$  où  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , alors on a bien que  $x^2 |\sin x| < \delta^2 \times 1 = \epsilon$ . C'était ce qu'on voulait démontrer.

Nous pouvons illustrer tout ceci sur le graphique suivant. La flèche horizontale décorée par «  $\exists \delta$  » correspond à la condition  $|x - 0| < \delta$ . La flèche verticale décorée par «  $\forall \epsilon$  » correspond à la condition  $|f(x) - 1| < \epsilon$ . L'objectif, pour un  $\epsilon$  donné, est de trouver un  $\delta$  telle que si  $x$  appartient à la zone délimitée par la flèche horizontale, alors  $f(x)$  appartient à la zone délimitée par la flèche verticale.



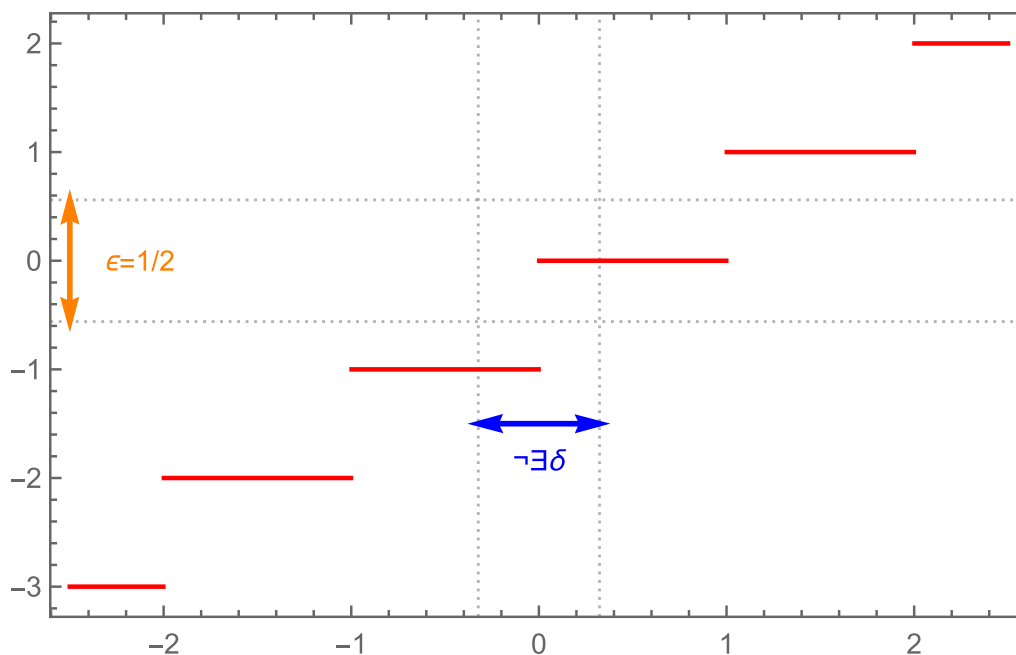
Il existe bien sûr de nombreuses valeurs de  $\delta$  possibles : si on en a trouvé une, alors n'importe quelle valeur plus petite convient. La question est de savoir s'il en existe au moins une, ce qui n'est pas toujours le cas.

*Exemple.* Prenons l'exemple de la fonction partie entière  $g(x) = [x]$ , dont le graphe est dessiné ci-dessous. Considérons  $a = 1$  et  $l = 1$ .

Si la valeur de  $\epsilon$  est suffisamment petite, disons  $\epsilon = 0,3$  comme sur le dessin, alors on voit qu'il y a un problème. Quelle que soit la largeur de la bande verticale, aussi petite que l'on veuille, on ne pourra jamais faire en sorte que dans la bande verticale,  $(x, f(x))$  soit toujours à l'intérieur de la bande horizontale. En termes mathématiques, on ne peut pas trouver de  $\delta$  qui rende vraie l'implication :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| < \delta \Rightarrow |[x] - 1| < 0,3.$$

Et donc la fonction  $x \mapsto [x]$  n'admet pas 1 comme limite en  $a = 1$ .



*Remarque.* Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et soit  $a \in A$  une valeur sur laquelle  $f$  est définie. Comme  $A \subset \bar{A}$ , le réel  $a$  est bien un point adhérent à l'ensemble de définition de  $A$ . On peut donc parler de « la limite de  $f$  en  $a$  ». Cette limite, si elle existe,<sup>13</sup> ne peut être que  $l = f(a)$ . Aucun autre réel  $l' \neq f(a)$  ne peut vérifier la condition  $(*_1)$ .

Démonstrons-le par l'absurde. Soit  $l' \neq f(a)$  et supposons que  $f(x)$  tende vers  $l'$  quand  $x \rightarrow a$ . Comme  $l' \neq l$ , le nombre suivant, qui représente la moitié de la distance entre  $l$  et  $l'$ , est strictement positif :

$$\epsilon = \frac{|f(a) - l'|}{2}.$$

En utilisant  $(*_1)$ , il doit donc exister un rayon  $\delta > 0$  tel que si  $x \in A$  vérifie  $|x - a| < \delta$ , alors  $|f(x) - l'| < \epsilon$ . Mais  $x = a$  est bien un élément de  $A$ , et il vérifie bien  $|a - a| = 0 < \delta$ . On devrait donc avoir :

$$|f(a) - l'| < \epsilon = \frac{|f(a) - l'|}{2}.$$

C'est absurde, donc  $f$  ne peut pas tendre vers  $l'$  quand  $x \rightarrow a$ . En résumé, si une fonction  $f$  est définie en un point  $a$ , **et** si elle admet une limite en ce point, alors cette limite doit être  $f(a)$ .

**Avertissement.** Il existe une autre convention pour la notation  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  que nous n'utiliserons pas dans ce cours. Dans l'autre convention, la condition  $|x - a| < \delta$  est remplacée par «  $x \neq a$  et  $|x - a| < \delta$  ». On parle parfois de limite « épointée » pour désigner les limites définies ainsi (voir la section « Cas particuliers » ci-dessous). Il est possible, dans certains ouvrages, de trouver cette convention plutôt que la nôtre. Il n'existe pas de consensus général sur cette notation, c'est pourquoi il est toujours important de préciser de quoi l'on parle.

*Exemple.* Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \bar{A}$ . L'énoncé «  $f$  n'a pas de limite en  $a$  » est quelques peu compliqué à écrire correctement. Il faut comprendre cet énoncé comme « quel que soit le réel  $l \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  ne tend pas vers  $l$  quand  $x \rightarrow a$  ». En écrivant proprement la négation des quantificateurs, cela donne donc :

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in A, \quad |x_0 - a| < \delta \text{ et } |f(x_0) - l| \geq \epsilon_0. \quad (**)$$

<sup>13</sup> Ce qui n'est pas forcément le cas ! Voir l'exemple de la fonction partie entière ci-dessus.

Donnons un exemple de fonction qui n'a pas de limite en un point. On pose :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors  $f$  n'a pas de limite en  $a = 0$ . Démontrons-le. Pour chaque  $l \in \mathbb{R}$ , nous devons trouver un réel  $\epsilon > 0$  qui fait que  $(**)$  est vraie. Le raisonnement va dépendre de la valeur de  $l$ .

1. Si  $l > 1$ , alors on choisit  $\epsilon_0 = (l - 1)/2$ . Soit  $\delta > 0$  un réel strictement positif. On doit trouver  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|x_0| < \delta$  et  $|\sin(1/x_0) - l| \geq (l - 1)/2$ . Or, on a :

$$\begin{aligned} \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) - l \right| \geq \frac{l-1}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) - l \geq \frac{l-1}{2} \text{ ou } \sin\left(\frac{1}{x}\right) - l \leq \frac{1-l}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{3l-1}{2} \text{ ou } \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1+l}{2}. \end{aligned}$$

Mais la deuxième condition est toujours vérifiée ! En effet,  $(1 + l)/2 \geq 1$  (car  $l \geq 1$ ) et on sait que  $\sin(1/x) \leq 1$ . On peut donc choisir n'importe quel  $x_0$  qui vérifie  $|x_0| < \delta$ , par exemple  $x_0 = \delta/2$ .

2. Si  $l < -1$ , alors le raisonnement est le même en prenant  $\epsilon_0 = (l + 1)/2$  et en notation que  $\sin(1/x) \geq -1$ .
3. Enfin, supposons que  $l \in [-1, 1]$ . Choisissons  $\epsilon = 1/2$ . Il existe une valeur  $y \in [-1, 1]$  qui vérifie  $|y - l| \geq 1/2$  (car l'intervalle  $[-1, 1]$  est de longueur  $2 > 2 \times (1/2)$ ). En appliquant la fonction arc-sinus, on trouve un angle

$$\theta = \arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Cet angle vérifie  $\sin \theta = y$ . Nous allons nous servir de cet angle pour trouver les  $x_0$ .

Soit donc  $\delta > 0$  un réel quelconque. On cherche une valeur  $x_0$  qui vérifie deux conditions :

- D'une part,  $\sin(1/x_0) = y$  (car on saura ainsi que  $|\sin(1/x_0) - l| \geq \epsilon_0$ ). En utilisant la fonction arc sinus et le fait que  $\theta = \arcsin y$ , cela signifie que l'on peut prendre  $x_0$  tel que :

$$\frac{1}{x_0} = \theta + 2\pi n_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\theta + 2\pi n_0} \Leftrightarrow n_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{x_0} - \theta \right) \quad (n_0 \in \mathbb{Z}).$$

- D'une part,  $|x_0| < \delta$ . En utilisant la forme de  $x_0$  trouvée ci-dessus, cela revient à (où l'on choisit  $n_0 \geq 1$  pour simplifier la valeur absolue) :

$$\frac{1}{\theta + 2\pi n_0} < \delta \Leftrightarrow n_0 > \frac{\delta - \theta}{2\pi}.$$

On peut donc choisir :

$$n_0 = \left\lceil \frac{\delta - \theta}{2\pi} \right\rceil + 1.$$

Ainsi, en posant  $x_0 = (\theta + 2\pi n_0)^{-1}$ , on trouve bien le contre-exemple.

Reformulons maintenant la définition  $(*_1)$  en termes de voisinages. L'idée est la même que dans la section [Ouverts et limites de suites](#).

**Proposition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \bar{A}$  un point adhérent à  $A$  et  $l \in \mathbb{R}$  un réel. Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \in V. \quad (**_2)$$

Si l'on considère qu'un voisinage de  $l$  correspond à un « niveau de précision » autour de  $l$ , alors on peut comprendre cette définition de la manière suivante : quel que soit le niveau de précision autour de  $l$  que l'on demande, il existe un rayon  $\delta > 0$  tel que si  $x$  reste à une distance de  $a$  inférieur à  $\delta$ , alors  $f(x)$  approche  $l$  avec la précision voulue.

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $(*_2)$  est vraie (avec les notations de la proposition) et démontrons que  $(*_1)$  aussi. Soit  $\epsilon > 0$ . Alors  $B(l, \epsilon)$  est un voisinage de  $l$ . Donc en utilisant  $(*_2)$ ,

il existe un rayon  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in A$ , si  $|x - a| < \delta$ , alors  $f(x) \in B(l, \epsilon)$ . Mais  $f(x) \in B(l, \epsilon)$  si et seulement si  $|f(x) - l| < \epsilon$ , ce qui est exactement ce que l'on voulait.

Réciproquement, supposons que  $(*_1)$  est vraie, démontrons que  $(*_2)$  aussi. Soit  $V$  un voisinage de  $l$  quelconque. Alors par définition il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B(l, \epsilon) \subset V$ . En utilisant  $(*_1)$  avec ce réel  $\epsilon$ , on en déduit qu'il existe  $\delta > 0$  tel que si  $x \in A$  vérifie  $|x - a| < \delta$ , alors  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Mais bien sûr cela équivaut à  $f(x) \in B(l, \epsilon)$ , et comme  $B(l, \epsilon) \subset V$ , on en déduit que  $f(x) \in V$ . C'est ce que l'on voulait démontrer. ■

Nous pouvons également reformuler  $|x - a| < \delta$  en termes de voisinages, ce qui mène à la proposition suivante (dont la démonstration est très similaire à la précédente) :

**Proposition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \bar{A}$  un point adhérent à  $A$  et  $l \in \mathbb{R}$  un réel. Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \exists W \text{ voisinage de } a, \forall x \in A, \quad x \in W \Rightarrow f(x) \in V. \quad (*_3)$$

Enfin, nous avons la caractérisation suivante, dont l'intérêt prendra tout son sens au chapitre **Continuité**. Pour mémoire, si  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction et  $V \subset \mathbb{R}$  est un sous-ensemble, alors la préimage de  $V$  par  $f$  est l'ensemble suivant :

$$f^{-1}(V) := \{a \in A \mid f(a) \in V\}.$$

**Proposition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \bar{A}$  un point adhérent à  $A$  et  $l \in \mathbb{R}$  un réel. Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a \text{ relatif à } A. \quad (*_4)$$

*Démonstration.* Démontrons que  $(*_3)$  et  $(*_4)$  sont équivalentes. Supposons d'abord que  $(*_3)$  est vraie. Soit  $V$  un voisinage de  $l$ . Alors il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que si  $x \in A \cap W$  alors  $f(x) \in V$ . En particulier,  $W \cap A \subset f^{-1}(V)$ , donc  $f^{-1}(V)$  est bien un voisinage relatif de  $a$ . Réciproquement, supposons que  $(*_4)$  est vraie. Soit  $V$  un voisinage de  $l$ . Comme  $f^{-1}(V)$  est un voisinage relatif de  $a$ , il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que  $f^{-1}(V) = W \cap A$ . Cette dernière égalité est équivalente (il suffit de débiller les définitions) à  $\forall x \in A, x \in W \Rightarrow x \in V$ . ■

Un corollaire extrêmement utile des propositions précédentes est le suivant, qu'il sera bon de retenir.

**Corollaire.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \bar{A}$  un point adhérent à son ensemble de définition. Supposons que  $f(x) \rightarrow l$  quand  $x \rightarrow a$ , où  $l \in \mathbb{R}$  est un réel.

1. Si  $l > 0$ , alors il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que  $\forall x \in A, x \in W \Rightarrow f(x) > 0$ .
2. Si  $l < 0$ , alors il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que  $\forall x \in A, x \in W \Rightarrow f(x) < 0$ .
3. Si  $l = 0$ , on ne peut rien dire.

*Démonstration.* Nous allons donner deux démonstrations, une qui fait intervenir les voisinages, l'autre plus explicite avec des  $\epsilon$ - $\delta$ . Nous allons traiter le cas  $l > 0$  ; le cas  $l < 0$  est quasiment identique.

1. La boule  $V = B(l, l/2)$  est un voisinage de  $l$ . Or si  $y \in B(l, l/2)$ , on a :

$$l - \frac{l}{2} < y < l + \frac{l}{2} \Rightarrow y > \frac{l}{2} > 0.$$

Donc comme  $f(x) \rightarrow l$ , on a que  $W = f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$  relatif à  $A$ , et on a bien  $x \in W \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow f(x) > 0$ .

2. Le raisonnement avec les  $\epsilon$ - $\delta$  est identique, mais nous l'écrivons pour montrer comment il correspond au raisonnement avec les voisinages.

Soit  $\epsilon = l/2 > 0$  un rayon. Si  $|y - l| < \epsilon$ , on trouve :

$$l - \frac{l}{2} < y < l + \frac{l}{2} \Rightarrow y > \frac{l}{2} > 0.$$

Maintenant, comme  $f(x) \rightarrow l$  en  $x \rightarrow a$ , on a qu'il existe un rayon  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ ,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

En d'autres termes,  $x \in B(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \Rightarrow f(x) > 0$ . On peut donc choisir  $W = B(l, l/2) \cap A$  pour notre voisinage.

Dans le cas où  $l = 0$ , on ne peut rien dire : la fonction peut rester positive, négative, ou alterner (à l'image de  $f(x) = x \sin(1/x)$ ). ■

On peut également caractériser les limites avec des suites plutôt que des voisinages.

**Proposition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \bar{A}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si et seulement si, pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $A$  telle que  $\lim u_n = a$ , on a  $\lim f(u_n) = l$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord la première implication. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $A$  avec  $\lim u_n = a$ . Montrons que  $\lim f(u_n) = l$ . En reprenant la définition, il faut, pour tout  $\epsilon > 0$ , trouver un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |f(u_n) - l| < \epsilon. \quad (\text{objectif})$$

Or, comme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , on sait qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ ,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Mais comme  $\lim u_n = a$ , on en déduit qu'il existe un rang  $N$  tel que  $n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \delta$ . En combinant cette inégalité avec la précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \delta \Rightarrow |f(u_n) - l| < \epsilon.$$

Pour la réciproque, nous allons raisonner par contraposée. Supposons<sup>14</sup> que  $f(x)$  ne tend pas vers  $l$  quand  $x \rightarrow a$ . En écrivant la négation de la définition de limite, cela signifie que :

$$\exists \epsilon_0 > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in A, \quad (|x - a| < \delta \text{ et } |f(x) - l| \geq \epsilon_0).$$

On fixe un tel  $\epsilon_0$ . Pour chaque  $\delta = 1/(n + 1)$ , on sait donc qu'il existe un élément  $u_n \in A$  qui vérifie  $|u_n - a| < 1/(n + 1)$  et  $|f(u_n) - l| \geq \epsilon_0$ . Donc  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ , mais  $f(u_n)$  ne peut pas converger vers  $l$  (car  $|f(u_n) - l|$  est toujours supérieur à  $\epsilon_0$ ). On a donc bien un contre-exemple à l'énoncé « si  $u_n \rightarrow a$  alors  $f(u_n) \rightarrow l$  ». ■

*Remarque.* On peut utiliser la propriété précédente pour démontrer que  $\sin(1/x)$  n'a pas de limite quand  $x \rightarrow 0$ . Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin(1/x) \rightarrow l$  quand  $x \rightarrow 0$ . Alors pour toute suite  $(u_n)$  qui tend vers 0, on devrait avoir  $\sin(1/u_n) \rightarrow l$ . Or, si on choisit  $u_n = (2\pi n)^{-1}$ , on obtient pour limite 0, alors que si l'on choisit la suite  $u'_n = (\pi/2 + 2\pi n)^{-1}$  on obtient pour limite 1. On en conclut que  $l = 0$  et  $l = 1$ , ce qui est absurde.

### III-A-2. Limite d'une fonction en $\pm\infty$

Commençons par rappeler la définition de « limite en l'infini ».

**Définition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un voisinage  $A$  de  $+\infty$ .<sup>15</sup> Soit  $l \in \mathbb{R}$  un réel. On dit que  $f$  tend vers  $l$  en  $+\infty$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x > C \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon. \quad (*)$$

Dans ce cas, on note :

<sup>14</sup> Attention, cela ne signifie pas forcément que  $f(x)$  a une limite différente de  $l$  ! La fonction  $f$  pourrait très bien ne pas avoir de limite du tout.

<sup>15</sup> On rappelle que cela veut dire qu'il existe un nombre  $B \in \mathbb{R}$  tel que  $]B, +\infty[ \subset A$ . Si ce n'est pas le cas, alors il n'y a pas de sens à donner à « la limite de  $f$  en  $+\infty$  ».



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \text{ ou } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l.$$

De la même manière, si  $f$  est définie au voisinage de  $-\infty$ , alors on dit que  $f$  tend vers  $l$  en  $-\infty$  et on note  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  si, et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \quad x < C \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

*Exemple.* Soit la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Montrons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Il s'agit donc, pour un  $\epsilon > 0$  donné, de chercher un réel  $C$  tel que si  $x > C$  alors  $1/x < \epsilon$ . C'est simple : il suffit de choisir  $C := 1/\epsilon$  et le tour est joué !

Voyons maintenant comment reformuler ces définitions en termes de voisinages. En faisant le même raisonnement que dans la section précédente, on obtient :

**Proposition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un voisinage de  $+\infty$  et soit  $l \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \exists W \text{ voisinage de } +\infty, \forall x \in A, \quad x \in W \implies f(x) \in V. \quad (*_2)$$

*Démonstration.* Supposons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ , c'est-à-dire que  $(*_1)$  est vraie, et démontrons  $(*_2)$ . Soit  $V$  un voisinage de  $l$ . Par définition, il existe un rayon  $\epsilon > 0$  tel que  $B(l, \epsilon) \subset V$ . En utilisant  $(*_1)$ , on en déduit qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in A$  vérifiant  $x > C$ , on a

$$|f(x) - l| < \epsilon \implies f(x) \in B(l, \epsilon) \subset V.$$

On peut alors poser  $W = ]C, +\infty[$ . Cette partie  $W$  est bien un voisinage de  $+\infty$  et vérifie bien la condition de  $(*_2)$ .

Réciproquement, supposons que la condition  $(*_2)$  est vérifiée et démontrons  $(*_1)$ . Soit  $\epsilon > 0$  un réel. On pose  $V = B(l, \epsilon)$  : c'est bien un voisinage de  $l$ , donc il existe un voisinage  $W$  de  $+\infty$  tel que pour tout  $x \in A$ ,

$$x \in W \implies f(x) \in V.$$

Par définition de voisinage de  $+\infty$ , il existe un réel  $C$  tel que  $]C, +\infty[ \subset W$ . En utilisant l'implication précédente, on obtient, pour tout  $x \in A$ ,

$$x > C \implies x \in W \implies f(x) \in V = B(l, \epsilon).$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. ■

**Proposition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un voisinage de  $+\infty$  et soit  $l \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } +\infty. \quad (*_3)$$

La démonstration est sensiblement la même que dans la section précédente.

*Remarque.* Des définitions similaires valent bien sûr pour des limites quand  $x \rightarrow -\infty$ .

### III-A-3. Limite infinie d'une fonction

Dans cette troisième section, nous définissons ce que cela signifie pour une fonction d'avoir une limite infinie en un point, et nous écrivons les propositions qui en donnent des caractérisations alternatives. Les démonstrations étant similaires aux précédentes, nous ne les écrivons pas. (Exercice : remplir les trous !)

**Définition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \bar{A}$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta \implies f(x) > C. \quad (*_1)$$

Dans ce cas, on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ ou encore } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty.$$

La définition de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  est obtenue en remplaçant  $f(x) > C$  par  $f(x) < C$ .

**Proposition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  comme dans la définition précédente. Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } +\infty, \exists W \text{ voisinage de } a, \forall x \in A, \quad x \in W \implies f(x) \in V. \quad (*_2)$$

**Proposition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  comme dans la définition précédente. Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si, et seulement si,

$$\forall V \text{ voisinage de } +\infty, \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a \text{ relatif à } A. \quad (*_3)$$

### III-A-4. Caractérisation générale des limites

En combinant tout ce que nous avons vu précédemment, nous pouvons donc donner une caractérisation très générale de la notion de limite de fonction.

**Théorème.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et supposons que  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  vérifie :

- Soit  $a \in \bar{A} \subset \mathbb{R}$  ;
- Soit  $a = \pm\infty$  en supposant que  $A$  est un voisinage de  $\pm\infty$ .

Soit  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  un réel ou  $\pm\infty$ . Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l &\iff \forall V \text{ voisinage de } l, \exists W \text{ voisinage de } a, \forall x \in A, \quad x \in W \implies f(x) \in V \\ &\iff \forall V \text{ voisinage de } l, \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a \text{ (relatif à } A). \end{aligned}$$

### III-A-5. Cas particuliers

Dans cette section, nous listons quelques cas particuliers de limites qui méritent des notations à part entière : les limites épointées, les limites à gauche, et les limites à droite. Commençons par définir la notion (relativement évidente) de restriction d'une fonction.

**Définition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $B \subset A$  un sous-ensemble. La restriction de  $f$  à  $B$ , généralement notée  $f|_B$ , est la fonction :

$$\begin{aligned} f|_B: B &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

En d'autres termes, c'est tout simplement la fonction que l'on obtient en prenant un ensemble de départ plus petit mais en gardant la même définition pour les images.

*Exemple.* Soit  $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction identité définie par  $\text{id}(x) = x$ , et soit  $\text{abs}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction valeur absolue définie par  $\text{abs}(x) = |x|$ . Alors on a :

$$\text{id}_{\mathbb{R}_+} = \text{abs}_{\mathbb{R}_+}.$$

En effet, sur l'ensemble  $\mathbb{R}_+$  des réels positifs, on a bien sûr  $|x| = x$ , donc les deux fonctions sont égales quand on les restreint à  $\mathbb{R}_+$ .

**Définition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , et soit  $a$  un réel tel que  $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$ . Alors on dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  quand  $x \rightarrow a$  en étant différent de  $a$  si  $f|_{A \setminus \{a\}}$  tend vers  $l$  quand  $x \rightarrow a$ . Dans ce cas, on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = l, \text{ ou encore } f(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} l.$$

Concrètement, cela signifie que l'énoncé suivant est vrai (nous le formulons en termes de voisinages pour traiter simultanément les cas  $l \in \mathbb{R}$  et  $l = \pm\infty$  mais nous pourrions tout reformuler en termes de boules  $B(l, \epsilon)$  ou de voisinages de  $\pm\infty$ ) :

$$\forall V \text{ voisinage de } l, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad x \neq a \text{ et } |x - a| < \delta \implies f(x) \in V.$$

Illustrons la différence entre cette définition et la définition habituelle par un exemple.

*Exemple.* Définissons une fonction par morceaux sur  $\mathbb{R}$  :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction vaut 1 partout, sauf en  $x = 0$  où elle vaut 0. Alors  $f(x)$  n'a pas de limite quand  $x \rightarrow 0$ , mais on a quand même :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1.$$

*Remarque.* Si  $f(x)$  admet une limite en  $a$ , alors elle admet une limite épointée en  $a$  avec la même valeur limite. En d'autres termes,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a; x \neq a} f(x) = l.$$

Passons maintenant au cas des limites à gauche et à droite.

**Définition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et soit  $a \in \mathbb{R}$  un point qui est adhérent<sup>16</sup> à l'ensemble  $A_{>a} \subset A$  défini par :

$$A_{>a} := \{x \in A \mid x > a\}.$$

On dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  quand  $x$  tend vers  $a$  par la droite, ou encore que  $l$  est la limite à droite de  $f$  en  $a$ , si la limite de  $f|_{A_{>a}}$  en  $a$  est  $l$ . Dans ce cas, on note :

$$\lim_{x \rightarrow a; x > a} f(x) = l, \text{ ou encore } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a; x > a} l.$$

La notion de limite à gauche est définie de façon similaire en considérant la restriction de  $f$  à :

$$A_{<a} := \{x \in A \mid x < a\}.$$

*Exemple.* Considérons la fonction partie entière  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ . Alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} E(x) = -1, \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} E(x) = 0.$$

*Remarque.* On peut trouver les notations suivantes dans certains textes :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l.$$

Cette notation est potentiellement ambiguë : on pourrait inclure  $x = a$  ou pas dans la condition «  $\forall x \in A_{>a}$  » ou «  $\forall x \in A_{\geq a}$  » qui définit la limite. C'est pourquoi dans ce cours on lui préférera la notion plus explicite ci-dessus.

## Section III-B. Opérations sur les limites

Dans cette partie du chapitre, nous expliquons quelles opérations il est possible d'effectuer sur les limites : les sommes, les produits, les quotients, et les compositions. Nous concluons par le théorème des gendarmes, une généralisation du théorème éponyme pour les suites.

<sup>16</sup> Le cas  $a = \pm\infty$  est autorisé mais il faut alors que  $A$  soit un voisinage de  $\pm\infty$ .

### III-B-1. Sommes

**Théorème.** Soit  $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions définies sur le même ensemble  $A$ , et soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  une valeur qui est soit dans l'adhérence  $\bar{A}$ . Soit  $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$  deux réels étendus. Supposons que  $f_1(x) \rightarrow l_1$  et  $f_2(x) \rightarrow l_2$  quand  $x \rightarrow a$ . Alors la limite de la somme  $f_1(x) + f_2(x)$  en  $x = a$  se comporte comme dans le tableau suivant (où F.I. signifie « forme indéterminée » et donne les cas où l'on n'a pas suffisamment d'informations pour calculer la limite).

$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x))$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_1 = +\infty$	$l_1 = -\infty$
$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$l_2 = -\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Il faut lire ce tableau de la manière suivante : par exemple, pour la première case, « si la limite  $l_1$  est un nombre réel et si  $l_2$  aussi, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + f_2(x)$  existe et vaut  $l_1 + l_2$  ».

*Remarque.* Dans le cas où la forme est indéterminée, cela ne signifie pas forcément que la limite n'existe pas, ou que l'on ne peut rien dire ! Cela signifie simplement qu'avec ce que l'on sait jusque-là, on n'a pas suffisamment d'informations pour déterminer la limite de la somme. Voir ci-dessous pour des exemples.

Il y a plusieurs cas à considérer. Comme l'addition est commutative, c'est-à-dire  $f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x)$ , on peut inverser les rôles de  $l_1$  et  $l_2$  dans le tableau. Il n'y a donc que six cas à démontrer ; les trois autres s'obtiennent en échangeant les rôles. Pour plus de simplicité, on va supposer dans ce qui suit que  $a \in \bar{A}$  est un nombre réel. Le cas de  $a = \pm\infty$  se traite de manière tout à fait analogue.

La démonstration qui suit est typique des démonstrations rigoureuses qui font intervenir les limites et il est important de bien la comprendre et la maîtriser. Ce n'est pas forcément évident : on peut facilement se perdre dans le raisonnement, oublier quelles sont les hypothèses, quel est le but... Il faut se poser et ne pas hésiter à la relire plusieurs fois. Nous allons donner le plus de détails possibles pour le premier cas, y compris en expliquant comment on trouve la solution.

*Démonstration :* cas  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ . Supposons pour commencer que  $l_1 \in \mathbb{R}$  et  $l_2 \in \mathbb{R}$ . En reprenant la définition de limite, on sait que les deux énoncés suivants sont vrais :

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - l_1| < \epsilon_1. \quad (*_1)$$

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - l_2| < \epsilon_2. \quad (*_2)$$

Notre objectif est de démontrer que l'énoncé suivant est vrai :

$$\forall \epsilon_3 > 0, \exists \delta_3 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |f_1(x) + f_2(x) - (l_1 + l_2)| < \epsilon_3. \quad (*_3)$$

Il s'agit de démontrer un énoncé de type « pour tout » ( $\forall$ ). Soit donc  $\epsilon_3 > 0$  un réel strictement positif quelconque. Notre objectif est donc de trouver un rayon  $\delta_3 > 0$  tel que si  $x$  est à une distance inférieure à  $\delta_3$  de  $a$ , alors  $f_1(x) + f_2(x)$  est à une distance au plus  $\epsilon_3$  de  $l_1 + l_2$ .

Or, intuitivement, en utilisant  $(*_1)$ , on peut s'arranger pour que  $f_1(x)$  soit à peu près égal à  $l_1$  avant autant de précision que l'on souhaite, tant que  $x$  est assez proche de  $a$  ; et avec  $(*_2)$ , c'est la même chose avec  $f_2(x)$  et  $l_2$ . Si  $f_1(x)$  est proche de  $l_1$  et  $f_2(x)$  est proche de  $l_2$ , alors  $f_1(x) + f_2(x)$  est proche de  $l_1 + l_2$  par l'inégalité triangulaire.

Réécrivons donc ce raisonnement de façon plus formelle. On *sait* que  $(*_1)$  est vrai : c'est notre hypothèse. On peut donc choisir n'importe quel  $\epsilon_1$ , et on sait qu'il va exister un  $\delta_1$ . On décide<sup>17</sup> donc de choisir une valeur de  $\epsilon_1$  particulière qui va nous servir pour la suite du raisonnement.  $\epsilon_1 = \epsilon_3/2$ . Grâce à notre hypothèse  $(*_1)$ , on sait qu'il existe donc une valeur  $\delta_1 > 0$  vérifiant, pour tout  $x \in A$ ,  $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - l_1| < \epsilon_3/2$ . De la même manière,<sup>18</sup> on peut choisir la valeur  $\epsilon_2 = \epsilon_3/2$ , et il existe donc une valeur  $\delta_2$  telle que  $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - l_2| < \epsilon_3/2$ .

Parmi les deux conditions en jeu, «  $|x - a| < \delta_1$  » et «  $|x - a| < \delta_2$  », l'une est plus restrictive que l'autre : c'est celle qui correspond au minimum de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . On définit alors  $\delta_3 := \min(\delta_1, \delta_2)$ . Alors on sait que si  $|x - a| < \delta_3$ , on aura à la fois  $|x - a| < \delta_1$  et  $|x - a| < \delta_2$ . En utilisant les deux implications précédentes, on obtient donc que si  $|x - a| < \delta_3$ , alors on a à la fois :

$$|f_1(x) - l_1| < \epsilon_1 = \epsilon_3/2, \quad \text{et} \quad |f_2(x) - l_2| < \epsilon_2 = \epsilon_3/2.$$

Or, on a l'inégalité triangulaire  $|A + B| \leq |A| + |B|$ . En l'appliquant à  $A = f_1(x) - l_1$  et à  $B = f_2(x) - l_2$ , on en arrive, si  $|x - a| < \delta_3$ , à :

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x) - (l_1 + l_2)| &= |(f_1(x) - l_1) + (f_2(x) - l_2)| \\ &\leq |f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_3/2 + \epsilon_3/2 = \epsilon_3. \end{aligned}$$

On a donc terminé ! On a supposé donné un  $\epsilon_3$  arbitraire, et on a réussi à trouver un  $\delta_3$  (en se servant des hypothèses  $(*_1)$  et  $(*_2)$ ) tel que

$$\forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |f_1(x) + f_2(x) - (l_1 + l_2)| < \epsilon_3.$$

C'était précisément notre objectif initial. On a donc terminé la démonstration. ■

La démonstration est forcément présentée dans un sens logique cohérent : on part des hypothèses et on arrive à la conclusion. En pratique, durant la phase de la recherche de la solution, il est intéressant de raisonner « à l'envers » en partant de la conclusion et en essayant de remonter le chemin logique jusqu'aux hypothèses.

C'est ce raisonnement « à l'envers » qui explique pour nous avons choisi  $\epsilon_1 = \epsilon_3/2$  et  $\epsilon_2 = \epsilon_3/2$  : nous savions que nous devions majorer  $|f_1(x) + f_2(x) - l_1 - l_2|$  par  $\epsilon_3$ , et on peut couper en deux la valeur absolue grâce à l'inégalité triangulaire. Il est donc raisonnable de penser que choisir la moitié du rayon fonctionne, et c'est le cas. Bien sûr, le choix que nous avons fait ici n'est pas une vérité absolue : suivant l'énoncé à démontrer, il faudra peut-être choisir différemment... C'est tout un art.

Passons maintenant aux démonstrations des autres cas du théorème. Nous nous permettons de donner moins de détails que pour la démonstration précédente.

*Démonstration* : cas  $l_1 \in \mathbb{R}$  et  $l_2 = +\infty$ . Supposons maintenant que  $f_1(x)$  tende vers un réel  $l_1$  quand  $x \rightarrow a$  mais que  $f_2(x)$  tende vers  $+\infty$ . En d'autres termes, on sait que les énoncés suivants sont vrais :

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - l_1| < \epsilon_1. \quad (*_1)$$

$$\forall C_2 \in \mathbb{R}, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f_2(x) > C_2. \quad (*_2)$$

Notre objectif est de démontrer que l'énoncé suivant est vrai :

$$\forall C_3 \in \mathbb{R}, \exists \delta_3 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_3 \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) > C_3. \quad (*_3)$$

<sup>17</sup> Attention avec les quantificateurs ! Notre *objectif* est de démontrer  $(*_3)$  qui est un énoncé de type  $\forall$ . On n'a donc pas le choix de la valeur de  $\epsilon_3$ . En revanche, notre hypothèse est que  $(*_1)$  est connue comme vraie. On peut donc choisir le  $\epsilon_1$  comme on le souhaite.

<sup>18</sup> C'est nous (pas les mathématiciens) qui avons décidé de choisir la même valeur pour  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ . On aurait très bien pu choisir des valeurs différentes, par exemple  $\epsilon_1 = (2/3)\epsilon_3$  et  $\epsilon_2 = (1/3)\epsilon_3$ .

Soit donc  $C_3 \in \mathbb{R}$  un réel quelconque. Notre objectif est de démontrer que si l'on se restreint à une boule ouverte suffisamment petite autour de  $x = a$ , alors  $f_1(x) + f_2(x)$  dépasse  $C_3$ .

On choisit<sup>19</sup>  $\epsilon_1 = 1$  et  $C_2 = C_3 - l_1 + 1$ . En utilisant  $(*)_1$ , on peut trouver  $\delta_1 > 0$  tel que si  $|x - a| < \delta_1$ , alors  $|f_1(x) - l_1| < 1$ , ce qui entraîne en particulier  $f_1(x) > l_1 - 1$ . De même, en utilisant  $(*)_2$ , on peut trouver  $\delta_2$  tel que si  $|x - a| < \delta_2$  alors  $f_2(x) > C_3 - l_1 + 1$ .

Définissons  $\delta_3 := \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $|x - a| < \delta_3$ , alors les conditions  $|x - a| < \delta_1$  et  $|x - a| < \delta_2$  sont toutes les deux vérifiées, donc en combinant les deux inéquations précédentes, on obtient :

$$f_1(x) + f_2(x) > l_1 - 1 + C_3 - l_1 + 1 = C_3.$$

Si l'on récapitule, quelle que soit la valeur  $C_3$  choisie, on a donc bien réussi à trouver une valeur  $\delta_3$  telle que si  $|x - a| < \delta_3$ , alors  $f_1(x) + f_2(x) > C_3$ . ■

Le cas où  $l_2 = -\infty$  et le cas où l'on intervertit les rôles de  $l_1$  et  $l_2$  se traitent de la même manière.

*Démonstration :* cas  $l_1 = l_2 = +\infty$ . Supposons maintenant que  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  tendent tous les deux vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow a$ . Soit  $C_3 \in \mathbb{R}$  quelconque. On choisit  $C_1 = C_3/2$  et  $C_2 = C_3/2$ . En utilisant l'hypothèse, on peut trouver  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tels que, pour tout  $x \in A$  :

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_1 &\implies f_1(x) > C_3/2, \\ |x - a| < \delta_2 &\implies f_2(x) > C_3/2. \end{aligned}$$

En particulier, pour  $|x - a| < \delta_3 := \min(\delta_1, \delta_2)$ , on obtient bien  $f_1(x) + f_2(x) > C_3$ . ■

Le cas où  $l_1 = l_2 = -\infty$  se traite de la même manière. Il ne reste donc plus que le cas de la forme indéterminée :

*Démonstration :* cas  $l_1 = +\infty$  et  $l_2 = -\infty$ . Il s'agit ici de démontrer que l'on n'a pas suffisamment d'informations pour déterminer la limite de  $f_1(x) + f_2(x)$  (si elle existe !) si on sait simplement que  $f_1(x) \rightarrow +\infty$  et  $f_2(x) \rightarrow -\infty$ . Montrons que tous les cas de figure sont possibles. Pour plus de simplicité on choisit  $a = 0$ , mais bien sûr n'importe quelle valeur serait possible. Dans cette table,  $m$  est un paramètre réel quelconque.

$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x) + f_2(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} (f_1(x) + f_2(x))$
$f_1(x) = \frac{2}{x^2}$	$f_2(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$f_1(x) = \frac{1}{x^2}$	$f_2(x) = \frac{-2}{x^2}$	$\frac{-1}{x^2}$	$-\infty$
$f_1(x) = \frac{1}{x^2} + m$	$f_2(x) = \frac{-1}{x^2}$	$m$	$m \in \mathbb{R}$
$f_1(x) = \frac{1}{x^2} + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f_2(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	N'existe pas.

### III-B-2. Produits

Passons maintenant aux produits. Il y a plus de cas que pour les sommes à cause des signes.

**Théorème.** Soit  $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions définies sur le même ensemble,  $a \in \bar{A}$  une valeur (soit un point adhérent, soit  $\pm\infty$ ). Soit  $l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$  deux réels étendus. Supposons que  $f_1(x) \rightarrow l_1$  et  $f_2(x) \rightarrow l_2$  quand  $x \rightarrow a$ . Alors la limite du produit  $f_1(x) \cdot f_2(x)$  en  $x = a$  se comporte comme dans le tableau suivant.

$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x))$	$l_1 = 0$	$l_1 > 0$	$l_1 < 0$	$l_1 = +\infty$	$l_1 = -\infty$
--	-----------	-----------	-----------	-----------------	-----------------

<sup>19</sup> Encore une fois, le choix est arbitraire ! On aurait très bien pu choisir  $\epsilon_1 = 418\pi + 53\sqrt{17}$ .

$l_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$l_2 > 0$	0	$l_1 \cdot l_2$	$l_1 \cdot l_2$	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 < 0$	0	$l_1 \cdot l_2$	$l_1 \cdot l_2$	$-\infty$	$+\infty$
$l_2 = +\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 = -\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

*Démonstration* : cas  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ . Dans le cas où les deux limites sont des nombres réels, le résultat est le même et nous pouvons donner une démonstration commune. Il y aura simplement une petite adaptation à effectuer si jamais une des deux limites est nulle. Prenons donc comme hypothèse les deux énoncés suivants :

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - l_1| < \epsilon_1. \quad (*_1)$$

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - l_2| < \epsilon_2. \quad (*_2)$$

Notre objectif est de démontrer cet énoncé :

$$\forall \epsilon_3 > 0, \exists \delta_3 > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |f_1(x)f_2(x) - l_1l_2| < \epsilon_3. \quad (*_3)$$

Soit donc  $\epsilon_3 > 0$  un réel, nous cherchons  $\delta_3$  qui rend l'énoncé précédent vrai. L'idée est que nous allons décomposer le terme qui apparaît dans la valeur absolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(x) - l_1l_2 &= f_1(x)f_2(x) - f_1(x)l_2 + f_1(x)l_2 - l_1l_2 \\ &= f_1(x)(f_2(x) - l_2) + (f_1(x) - l_1)l_2. \end{aligned}$$

On sait majorer  $f_1(x) - l_1$  et  $f_2(x) - l_2$  en utilisant  $(*_1)$  et  $(*_2)$ . La petite difficulté est que le terme devant  $f_2(x) - l_2$  n'est pas constant. Nous ne pouvons donc pas directement utiliser notre astuce précédente et choisir tout de suite  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  indépendamment. Il faut procéder dans l'ordre et on va commencer par le terme de droite qui est plus simple.

1. Si  $l_2 \neq 0$ , on choisit :

$$\epsilon_1 := \frac{\epsilon_3}{2|l_2|} > 0.$$

Si  $l_2 = 0$ , alors le terme de droite est nul quoi qu'il en soit et on peut choisir  $\epsilon_1$  comme on le souhaite, disons  $\epsilon_1 = 1 > 0$ .

Dans les deux cas, en se servant de  $(*_1)$ , on sait qu'il existe  $\delta_1$  tel que si  $|x - a| < \delta_1$  alors  $|f_1(x) - l_1| < \epsilon_1$ .

2. Il faut maintenant s'occuper du terme de gauche. On ne peut pas choisir  $\epsilon_2 = \frac{\epsilon_3}{2f_1(x)}$ , car dans l'énoncé que l'on veut prouver, car  $\epsilon_2$  ne peut pas dépendre de  $x$  : en effet, nous nous servons de  $\epsilon_2$  pour trouver  $\delta_2$  qui va nous servir à trouver  $\delta_3$ , et  $\delta_3$  arrive avant  $x$  dans l'énoncé.

Cependant, si  $|x - a| < \delta_1$ , on sait que  $|f_1(x) - l_1| < \epsilon_1$ . En particulier, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|f_1(x)| < \epsilon_1 + |l_1|.$$

Donc même si  $f_1(x)$  est variable, dans le pire des cas, pour les valeurs de  $x$  qui nous nous intéressent, il ne dépassera pas  $\epsilon_1 + |l_1|$  en valeur absolue. On peut donc choisir la valeur suivante pour  $\epsilon_2$  :

$$\epsilon_2 := \frac{\epsilon_3}{2(\epsilon_1 + |l_1|)} > 0.$$

En utilisant  $(*_2)$ , on sait qu'il existe  $\delta_2$  tel que si  $|x - a| < \delta_2$ , alors  $|f_2(x) - l_2| < \epsilon_2$ .

Recollons maintenant les morceaux. Comme avant, on choisit  $\delta_3 := \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si on sait que  $|x - a| < \delta_3$ , alors on aura à la fois  $|x - a| < \delta_1$  et  $|x - a| < \delta_2$  et donc :

$$\begin{cases} |f_1(x) - l_1| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon_3}{2|l_2|}, \\ |f_2(x) - l_2| < \epsilon_2 = \frac{\epsilon_3}{2(\epsilon_1 + |l_1|)}. \end{cases}$$

En se servant de la décomposition de  $f_1(x)f_2(x) - l_1l_2$  trouvée plus tôt, on obtient (dans le cas où  $l_2 \neq 0$ ) :

$$\begin{aligned} |f_1(x)f_2(x) - l_1l_2| &= |f_1(x)(f_2(x) - l_2) + (f_1(x) - l_1)l_2| \\ &\leq |f_1(x)(f_2(x) - l_2)| + |(f_1(x) - l_1)l_2| \\ &= |f_1(x)| \cdot |f_2(x) - l_2| + |f_1(x) - l_1| \cdot |l_2| \\ &\leq (\epsilon_1 + |l_1|) \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1 \cdot |l_2| \\ &= (\epsilon_1 + |l_1|) \cdot \frac{\epsilon_3}{2(\epsilon_1 + |l_1|)} + \frac{\epsilon_3}{2|l_2|} \cdot |l_2| \\ &= \frac{\epsilon_3}{2} + \frac{\epsilon_3}{2} = \epsilon_3. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $l_2 = 0$ , le raisonnement est le même mais le deuxième terme disparaît tout de suite et on obtient à la fin  $\epsilon_3/2 < \epsilon_3$ . Dans tous les cas, on a bien la conclusion voulue : quel que soit  $\epsilon_3 > 0$  choisi, nous avons réussi à trouver  $\delta_3 > 0$  tel que si  $|x - a| < \delta_3$ , alors on a  $|f_1(x)f_2(x) - l_1l_2| < \epsilon_3$ . ■

*Démonstration :* cas  $l_1 = +\infty$ ,  $l_2 > 0$ . Supposons maintenant que  $f_1(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow a$ , et que  $f_2(x) \rightarrow l_2$  où  $l_2 > 0$  est un réel strictement positif. On a donc :

$$\forall C_1 \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f_1(x) > C_1. \quad (*_1)$$

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - l_2| < \epsilon_2. \quad (*_2)$$

Notre objectif est de démontrer que  $f_1(x)f_2(x) \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire :

$$\forall C_3 \in \mathbb{R}, \exists \delta_3 > 0, \forall x \in A, \quad |x - a| < \delta_3 \Rightarrow f_1(x)f_2(x) > C_3. \quad (*_3)$$

Soit donc  $C_3 \in \mathbb{R}$  un réel quelconque. Notre plus gros problème dans ce qui suit sera la gestion des signes ; il est donc primordial de connaître celui de  $C_3$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $C_3 > 0$ . En effet, si on arrive à montrer  $(*_3)$  pour toutes les valeurs  $C_3 > 0$ , alors on peut aussi le faire facilement pour les valeurs  $C_3 \leq 0$ . En effet, il suffit d'appliquer  $(*_3)$  à  $C'_3 = 1$  (par exemple) : on trouve un  $\delta_3 > 0$  tel que si  $|x - a| < \delta_3$ , alors  $f_1(x)f_2(x) > 1$  ; mais alors on a clairement  $f_1(x)f_2(x) > C_3$  pour n'importe quelle valeur  $C_3 \leq 0$ .

Il faut également que nous nous occupions du signe de  $f_2$ . Pour cela, on va se servir de  $(*_2)$ . Si on applique  $(*_2)$  à  $\epsilon_2 := l_2/2$ , qui est bien strictement positif. On trouve alors un  $\delta_2 > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ , on ait :

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - l_2| < \frac{l_2}{2} \Rightarrow \frac{l_2}{2} < f_2(x) < \frac{3l_2}{2}.$$

En particulier, pour  $|x - a| < \delta_2$ , on a  $f_2(x) > l_2/2 > 0$ . On voit donc que dans un voisinage de  $x = a$ , la fonction  $f_2$  est strictement positive.

Passons enfin à  $f_1$ . En appliquant  $(*_1)$  à  $C_1 = 2C_3/l_2$ , on obtient qu'il existe un  $\delta_1 > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ , on a :

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow f_1(x) > \frac{2C_3}{l_2}.$$

En combinant ces deux implications, si on pose  $\delta_3 := \min(\delta_1, \delta_2)$ , on obtient (en faisant bien attention à la règle des signes !), pour tout  $x \in A$  :

$$|x - a| < \delta_3 \Rightarrow f_1(x)f_2(x) > \frac{2C_3}{l_2} \cdot \frac{l_2}{2} = C_3.$$



C'était précisément ce que nous voulions démontrer. ■

La plupart des autres cas ( $l_1 = -\infty$ ,  $l_2 = -\infty$ , etc.) se démontrent de façon analogue. Donnons simplement des exemples pour montrer que le cas  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = +\infty$  est effectivement une forme indéterminée.

*Démonstration :* cas  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = +\infty$ . Choisissons  $a = 0$  pour plus de simplicité. Bien sûr, cela n'a aucune incidence sur le raisonnement : on pourrait choisir n'importe quelle valeur de  $a$  et trouver des exemples (y compris  $a = \pm\infty$ ). Dans le tableau qui suit, les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont définies sur un ensemble dont l'adhérence contient  $a = 0$ , et elles vérifient  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = +\infty$ . Comme avant,  $m$  désigne un paramètre réel quelconque.

$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x) \cdot f_2(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} (f_1(x) \cdot f_2(x))$
$f_1(x) = x^3 + mx^2$	$f_2(x) = \frac{1}{x^2}$	$x + m$	$m \in \mathbb{R}$
$f_1(x) =  x $	$f_2(x) = \frac{1}{x^2}$	$\frac{ x }{x^2}$	$+\infty$
$f_1(x) = - x $	$f_2(x) = \frac{1}{x^2}$	$\frac{- x }{x^2}$	$-\infty$
$f_1(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f_2(x) = \frac{1}{x^2}$	$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	N'existe pas.

### III-B-3. Quotients

**Théorème.** Soit  $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions définies sur le même ensemble,  $a \in \bar{A}$  une valeur (soit un point adhérent, soit  $\pm\infty$ ). Soit  $l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$  deux réels étendus. Supposons que  $f_1(x) \rightarrow l_1$  et  $f_2(x) \rightarrow l_2$  quand  $x \rightarrow a$ . Enfin, supposons que  $f_2(x) \neq 0$  autour de  $a$ . Alors la limite du quotient  $f_1(x)/f_2(x)$  en  $x = a$  se comporte comme dans le tableau suivant.

$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x)/f_2(x))$	$l_1 = 0^+$	$l_1 = 0^-$	$l_1 > 0$	$l_1 < 0$	$l_1 = +\infty$	$l_1 = -\infty$
$l_2 = 0^+$	F.I.	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 = 0^-$	F.I.	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l_2 > 0$	0	0	$l_1/l_2$	$l_1/l_2$	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 < 0$	0	0	$l_1/l_2$	$l_1/l_2$	$-\infty$	$+\infty$
$l_2 = +\infty$	0	0	0	0	F.I.	F.I.
$l_2 = -\infty$	0	0	0	0	F.I.	F.I.

*Remarque.* Dans ce tableau, on prend la notation :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \text{ dans un voisinage de } a \text{ relatif à } A. \end{cases}$$

En théorie, il y a de nombreux cas à vérifier. Fort heureusement, on peut en fait s'aider du tableau pour le produit (section précédente) et du lemme suivant :

**Lemme.** Soit  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \bar{A}$ . Supposons que  $g(x) \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$  quand  $x \rightarrow a$ . Alors la limite de l'inverse  $1/g(x)$  se comporte comme dans le tableau suivant :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \qquad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$$

$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$l = 0^+$	$+\infty$
$l = 0^-$	$-\infty$
$l = 0$	F.l.
$l = \pm\infty$	0

*Remarque.* Maintenant que nous sommes habitués aux démonstrations avec les  $\epsilon$ - $\delta$ , les démonstrations qui suivent seront moins détaillées que les précédentes. À vous de vous assurer que vous savez justifier convenablement toutes les étapes ! Inspirez-vous des démonstrations des sections précédentes.

*Démonstration :* cas  $l \neq 0$ . Traitons d'abord le cas où  $l \neq 0$  est un réel non nul. Soit  $\epsilon > 0$  un réel. Notre objectif est de majorer la quantité suivante :

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|l - g(x)|}{|g(x)l|} = \frac{|g(x) - l|}{|g(x)l|}. \quad (*)$$

Supposons que  $l > 0$  (le cas  $l < 0$  est quasiment identique). Soit  $\epsilon' > 0$  un paramètre réel, que nous allons fixer plus tard en fonction de  $\epsilon$ . Étant donné que  $g(x) \rightarrow l$ , on sait qu'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ ,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \epsilon'.$$

On peut donc majorer le numérateur de (\*) aisément. Le problème est au niveau du dénominateur. Le nombre  $l$  est fixé, et s'il n'y avait que lui au dénominateur, on pourrait juste choisir  $\epsilon' = \epsilon l$ . Mais il y a aussi le nombre  $g(x)$  dont nous devons nous occuper. Or avec l'inéquation précédente, on a :

$$|g(x) - l| < \epsilon' \Rightarrow g(x) > l - \epsilon'.$$

Il faut donc s'assurer de deux choses quand il s'agit de fixer  $\epsilon'$  :

1. Tout d'abord, on va demander à avoir  $\epsilon' < l/2$ , comme ça, nous saurons que  $g(x) > l/2$ .
2. Ensuite, la fraction entière doit être inférieure à  $\epsilon$ . Avec la minoration de  $g(x)$  que nous venons d'avoir, on a :

$$\frac{|g(x) - l|}{|g(x)l|} < \frac{2|g(x) - l|}{l^2} < \frac{2\epsilon'}{l^2}.$$

Donc si on choisit  $\epsilon' < \epsilon l^2/2$ , ce sera gagné.

Maintenant que nous avons analysé le problème, il faut conclure en « remontant » les arguments. On pose donc  $\epsilon' := \min(l/2, \epsilon l^2/2)$  qui est bien un nombre strictement positif. Grâce au fait que  $g(x) \rightarrow l$ , on sait qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in A$ ,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \epsilon' \Rightarrow \frac{2|g(x) - l|}{l^2} < \frac{2\epsilon'}{l^2} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l} \right| < \epsilon. \blacksquare$$

*Démonstration :* cas  $l = 0^+$ . Supposons maintenant que  $g(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow a$  avec  $g(x) \geq 0$  dans un voisinage de  $a$  relatif à  $A$ . Montrons qu'alors  $1/g(x) \rightarrow +\infty$ .

Soit  $C \in \mathbb{R}$  un réel. Posons

$$\epsilon := \begin{cases} \frac{1}{C}, & \text{si } C \geq 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $g(x) \rightarrow 0$ , il existe  $\delta' > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ , on a :

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - 0| < \epsilon.$$

Or comme  $g(x) \geq 0$  dans un voisinage de  $a$ , qui à prendre un  $\delta$  plus petit, on peut supposer que si  $|x - a| < \delta$  alors  $g(x) \geq 0$ . On obtient donc que si  $|x - a| < \delta$ , alors  $g(x) < \epsilon$ , ce qui entraîne  $1/g(x) > 1/\epsilon$ . Si  $C > 1$  alors  $\epsilon = 1/C$  et on a gagné ; si  $C \leq 1$ , alors  $\epsilon = 1/2$  et donc  $1/\epsilon = 2 > C$ , et c'est gagné aussi ! ■

Les autres cas sont assez similaires et sont laissés en exercice. Pour démontrer le théorème il suffit d'appliquer le théorème sur le produit à  $g_1(x) = f_1(x)$  et  $g_2(x) = 1/f_2(x)$ , car :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}.$$

### III-B-4. Composition

**Théorème.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions. On suppose que  $f(A) \subset B$ . Soit  $a \in \bar{A}$  et  $b \in \bar{B}$  et  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ . Alors :

$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = l \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = l.$$

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ . On cherche à avoir  $|g(f(x)) - l| < \epsilon$ . On va procéder en deux étapes pour se servir de nos deux hypothèses :

1. Tout d'abord, comme  $g(y) \rightarrow l$  quand  $y \rightarrow b$ , on sait qu'il existe un  $\delta' > 0$  tel que pour tout  $y \in B$ ,

$$|y - b| < \delta' \Rightarrow |g(y) - l| < \epsilon. \quad (*)$$

2. Ensuite, comme  $f(x) \rightarrow b$  quand  $x \rightarrow a$ , en appliquant la définition de limite à  $\epsilon' := \delta'$ , on en déduit qu'il existe un  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ ,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \delta'. \quad (**)$$

En combinant (\*) et (\*\*), on obtient que pour tout  $x \in A$ ,

$$|x - a| < \delta \stackrel{(**)}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \delta' \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |g(f(x)) - l| < \epsilon.$$

C'était ce qu'on voulait démontrer ! ■

## Section III-C. Limites et inégalités

### III-C-1. Théorème des gendarmes

Commençons par donner l'analogie fonctionnel d'un théorème bien connu pour les suites.

**Théorème « des gendarmes<sup>20</sup> ».** Soit  $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions et  $a \in \bar{A}$ . On suppose que :

1. Pour tout  $x \in A$ , on a l'encadrement

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

2. Les deux fonctions  $f$  et  $h$  convergent vers une même limite  $l \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l.$$

Alors  $g$  a une limite en  $a$  et cette limite est  $l$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ .

*Démonstration.* La démonstration est un petit exercice de réécriture des définitions. Supposons pour simplifier que  $a \in \mathbb{R}$  est un nombre réel ; le cas  $a = \pm\infty$  se traite de manière similaire.

Soit  $\epsilon > 0$  un réel strictement positif quelconque. En utilisant le fait que  $f(x) \rightarrow l$  et  $h(x) \rightarrow l$  quand  $x \rightarrow a$ , on obtient qu'il existe deux réels  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_3 > 0$  tels que, pour tout  $x \in A$ ,

<sup>20</sup> On trouve aussi parfois la terminologie « théorème d'encadrement ».

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < f(x).$$

$$|x - a| < \delta_3 \Rightarrow |h(x) - l| < \epsilon \Rightarrow h(x) < l + \epsilon.$$

Posons  $\delta_2 := \min(\delta_1, \delta_3)$ . Alors en combinant les deux inégalités précédentes, on a :

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow \begin{cases} |x - a| < \delta_1 \\ |x - a| < \delta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l - \epsilon < f(x) \\ h(x) < l + \epsilon \end{cases} \Rightarrow l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon.$$

On obtient donc bien en conclusion que si  $|x - a| < \delta_2$ , alors  $|g(x) - l| < \epsilon$ . ■

*Remarque.* L'énoncé demande que les trois fonctions soient définies sur le même ensemble. Si elles ne le sont pas, ce n'est pas grave : on peut très bien restreindre les fonctions à un voisinage de  $a$ . L'essentiel est que les trois fonctions soient définies sur un voisinage de  $a$ .

Dans le cas où la limite est infinie, l'énoncé est un peu simplifié, même si le raisonnement est le même.

**Théorème.** Soit  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \bar{A}$ . On suppose que :

1. D'une part, pour tout  $x \in A$ , on a  $f(x) \leq g(x)$ .
2. D'autre part,  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow a$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

Alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .

*Démonstration.* Supposons pour simplifier que  $a \in \mathbb{R}$ , le cas  $a = \pm\infty$  étant similaire. Soit  $C \in \mathbb{R}$  un réel. Par hypothèse, il existe un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$ ,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > C.$$

Or, on sait que  $f(x) \leq g(x)$ , ce dont on déduit que  $|x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \geq f(x) > C$ . ■

Bien sûr, on a un théorème similaire qui dit que si  $g(x) \rightarrow -\infty$  alors  $f(x) \rightarrow -\infty$  (attention, le sens est inversé !).

### III-C-2. Comparaison des limites

**Théorème.** Soit  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \bar{A}$ . On suppose que :

1. Pour tout  $x \in A$ , on a  $f(x) \leq g(x)$ .
2. La fonction  $f$  tend vers  $l \in \bar{\mathbb{R}}$  en  $a$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .
3. La fonction  $g$  tend vers  $l' \in \bar{\mathbb{R}}$  en  $a$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ .

Alors on a l'inégalité  $l \leq l'$ .

*Avertissement.* Ce théorème est très différent du théorème des gendarmes ! Dans le théorème des gendarmes, on a trois fonctions  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , on suppose que les fonctions aux deux extrêmes convergent vers la même limite, et on en déduit que la fonction au centre converge aussi. C'est donc un théorème d'existence de limite. Ici, dans le théorème de comparaison, on n'a que deux fonctions, et on suppose que les deux fonctions convergent. On n'a donc aucune information si l'une des deux ne converge pas ! Si on sait juste (par exemple) que  $f(x) \leq g(x)$  et que  $f(x) \rightarrow 2$ , alors on ne peut pas dire grand-chose sur  $g(x)$  sans avoir plus d'informations.

*Avertissement.* L'inégalité dans la conclusion du théorème est une inégalité large,  $l \leq l'$ . On pourrait être tenté de penser que si notre hypothèse de départ était  $f(x) < g(x)$ , alors on pourrait en conclure que  $l < l'$ . C'est faux ! Considérons les deux fonctions  $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définies par :

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}, \quad g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-1}{x}.$$

Alors  $f(x) < g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . En fait, si l'on sait que  $f(x) < g(x)$ , alors on peut en déduire que  $f(x) \leq g(x)$  et donc que  $l \leq l'$  (sous réserve de l'existence des limites), mais il est possible que  $l = l'$ .

*Démonstration.* Supposons que  $f$  et  $g$  sont comme dans l'énoncé, avec les mêmes notations. Nous allons montrer que  $l \leq l'$ . Le raisonnement que nous allons donner est un raisonnement pas l'absurde. Supposons que  $l > l'$ . L'idée est que dans ce cas,  $l$  et  $l'$  sont suffisamment éloignés pour que quand  $x$  est suffisamment proche de  $a$ ,  $f(x)$  sera proche de  $l$  et donc supérieur à  $g(x)$  qui sera proche de  $l'$  :



Plus formellement, posons

$$\epsilon := \frac{l - l'}{3} > 0.$$

C'est le tiers de la distance entre  $l$  et  $l'$ . En utilisant nos hypothèses que  $f(x) \rightarrow l$  et  $g(x) \rightarrow l'$ , on en déduit qu'il existe  $\delta, \delta' > 0$  tels que, pour tout  $x \in A$  :

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{l - l'}{3}, \quad |x - a| < \delta' \Rightarrow |g(x) - l'| < \frac{l - l'}{3}.$$

Il existe au moins un réel  $x_0$  qui vérifie les deux conditions, par exemple :

$$x_0 := \frac{\min(\delta, \delta')}{2}.$$

Mais alors, pour ce réel  $x_0$ , on a :

$$f(x) > l - \frac{l - l'}{3} = \frac{2l + l'}{3} > \frac{l + 2l'}{3} = l' + \frac{l - l'}{3} > g(x).$$

Cela contredit notre hypothèse initiale que  $f(x) \leq g(x)$ , ce qui est absurde. ■

On peut se servir de ce théorème pour démontrer un résultat qui paraît relativement évident.

**Corollaire (unicité de la limite).** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \bar{A}$ . Supposons que  $f(x) \rightarrow l$  et  $f(x) \rightarrow l'$  quand  $x \rightarrow a$ , où  $l, l' \in \mathbb{R}$ . Alors  $l = l'$ .

*Démonstration.* On applique le théorème précédent avec  $f = g$ . On a bien  $f(x) \leq f(x)$ . Le terme de gauche tend vers  $l$  et celui de droite vers  $l'$  donc  $l \leq l'$ . Mais bien sûr, le terme de gauche tend aussi vers  $l'$  et celui de droite vers  $l$ , donc  $l' \leq l$ . On en déduit que  $l = l'$  par antisymétrie de la relation d'ordre. ■

### III-C-3. Limites de fonctions monotones

Terminons ce chapitre sur une propriété des fonctions monotones, dont nous rappelons la définition.

**Définition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est :

- *Croissante* si  $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .
- *Strictement croissante* si  $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .
- *Décroissante* si  $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ .
- *Strictement décroissante* si  $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ .
- *Monotone* si elle est croissante ou décroissante.
- *Strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Théorème.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante définie sur un intervalle ouvert  $I = ]a, b[$ , où  $a < b$ . Alors on a deux cas de figures :

- Si  $f$  est majorée, alors  $f$  admet une limite finie  $l \in \mathbb{R}$  à gauche en  $b$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow b; x < b} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

De plus,  $l$  est la borne supérieure de l'image de  $f$  :

$$l = \sup_{x \in I} f(x) = \sup f(I).$$

- Si  $f$  n'est pas majorée, alors :

$$\lim_{x \rightarrow b; x < b} f(x) = +\infty.$$

*Remarque.* On a un énoncé similaire pour les fonctions décroissantes en remplaçant  $f$  par  $-f$ . De plus, pour la limite en  $a$ , on peut appliquer le théorème à la fonction « renversée »  $x \mapsto f(-x)$ , qui est décroissante. Enfin, les cas  $a, b = \pm\infty$  sont similaires.

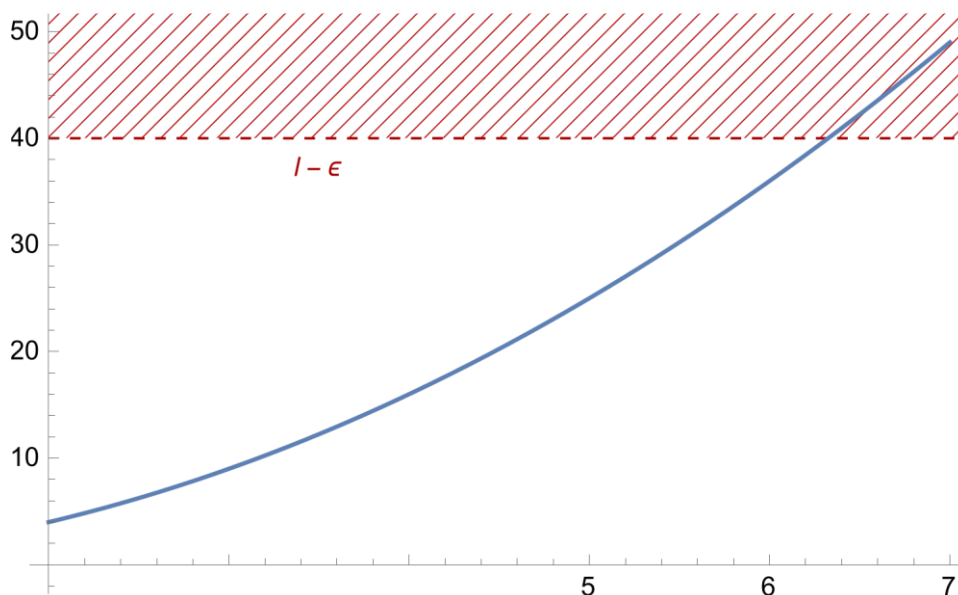
*Démonstration.* Il y a deux cas à démontrer. Commençons par le cas où  $f$  est majorée, disons par  $M \in \mathbb{R}$ . En d'autres termes, pour tout  $x \in I$ , on a  $f(x) \leq M$ . L'image de  $f$  est l'ensemble :

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I, f(x) = y\}.$$

Cet ensemble est majoré par  $M$ . Il est de plus clairement non vide (par exemple,  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \in f(I)$ ). En utilisant la propriété de la borne supérieure, on en déduit que cet ensemble admet une borne supérieure, notée :

$$l = \sup f(I) = \sup_{x \in I} f(x).$$

Démontrons que  $l$  est la limite de  $f$  en  $b$ . Soit  $\epsilon > 0$  ; on cherche  $\delta > 0$  tel que si  $|x - b| < \delta$ , alors  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Alors par définition de la borne supérieure, le nombre  $l - \epsilon$  n'est pas un majorant de  $f(I)$ . Cela signifie qu'il existe  $c \in I$  tel que  $f(c) > l - \epsilon$ . Nous sommes donc dans une situation comme sur le graphique suivant, où la partie hachurée correspond aux valeurs de la fonction telles que  $f(x) > l - \epsilon$  :



Posons  $\delta := b - c > 0$ . Alors, pour tout  $x \in I$  qui vérifie  $|x - b| < \delta$ , on a  $x > c$ , donc  $f(x) \geq f(c) > l - \epsilon$ . De plus, comme  $l$  est la borne supérieure, c'est en particulier un majorant, donc  $f(x) \leq l < l + \epsilon$ . On a donc bien  $|f(x) - l| < \epsilon$  quoi qu'il en soit, dès que  $|x - b| < \delta$ .

Passons maintenant au cas où  $f$  n'est pas majorée. Soit  $C \in \mathbb{R}$  un réel. Comme  $f$  n'est pas majorée, le réel  $C$  n'est pas un majorant de  $f$ , donc il existe  $c \in I$  tel que  $f(c) > C$ . Posons  $\delta :=$

$b - c$ . Alors si  $x \in I$  vérifie  $|x - b| < \delta$ , on a  $x > c$  donc  $f(x) \geq f(c) > C$ . C'était bien ce que nous voulions démontrer ! ■





## Chapitre IV. Continuité

Dans tout ce chapitre,  $I$  désigne un intervalle d'intérieur non-vide (c'est-à-dire qui contient au moins deux points).

### Section IV-A. Définitions et exemples

#### IV-A-1. Continuité d'une fonction

**Définition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$  une valeur sur laquelle  $f$  est définie. On dit que  $f$  est *continue en  $a$*  si  $\lim_{x \rightarrow a, x \in I} f(x)$  existe.

La proposition suivante découle directement d'une propriété vue dans la section [Limite finie d'une fonction en un point](#).

**Proposition.** Soit  $f$  et  $a$  comme dans la définition. Si  $f$  est continue en  $a$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}.$$

**Proposition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- La limite de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow a$ ,  $x \in I \setminus \{a\}$  existe ;
- Cette limite vaut  $f(a)$ .

On peut réinterpréter cette définition en termes de voisinages, en se servant des caractérisations des limites vues dans le chapitre précédent.

**Proposition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si :

$$\forall V \text{ voisinage de } f(a), \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a \text{ relatif à } I.$$

**Corollaire.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ . Supposons que  $a$  est un point intérieur de  $I$ , c'est-à-dire que  $a \in I^\circ$ . Alors  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si :

$$\forall V \text{ voisinage de } f(a), \quad f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a.$$

La définition précédente est une définition locale, qui ne s'intéresse qu'au comportement de la fonction au voisinage d'un point. Passons maintenant à la version globale.

**Définition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est *continue* si elle est continue en  $a$  pour tout  $a \in I$ .

**Théorème.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Elle est continue si, et seulement si,

$$\forall U \subset \mathbb{R} \text{ ouvert}, \quad \exists V \subset \mathbb{R} \text{ ouvert}, \quad f^{-1}(U) = I \cap V.$$

Si  $I$  est un intervalle ouvert, alors on peut simplifier le théorème précédent :

**Corollaire.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si  $I$  est ouvert, alors  $f$  est continue si, et seulement si,

$$\forall U \subset \mathbb{R} \text{ ouvert}, \quad f^{-1}(U) \text{ est ouvert.}$$

*Démonstration.* L'intersection de deux ouverts est ouverte. ■

**Corollaire.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction où  $I$  est ouvert. Alors  $f$  est continue si, et seulement si,

$$\forall J \subset \mathbb{R} \text{ intervalle ouvert}, \quad f^{-1}(J) \text{ est ouvert.}$$

*Démonstration.* Il suffit de se servir du fait que tout ouvert est une réunion d'intervalles ouverts, et que pour tout réunion  $U = \bigcup_k J_k$ , on a :

$$f^{-1}\left(\bigcup_k J_k\right) = \bigcup_k f^{-1}(J_k). \quad \blacksquare$$

*Remarque.* Nous verrons dans les exemples ci-dessous que même si  $J$  est un intervalle et que  $f$  est continue, la préimage  $f^{-1}(J)$  n'est pas forcément un intervalle ouvert, mais potentiellement une réunion de plusieurs intervalles ouverts !

On peut également caractériser les fonctions continues à l'aide des fermés.

**Proposition.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Alors  $f$  est continue si, et seulement si,

$$\forall F \subset \mathbb{R} \text{ fermé}, \quad f^{-1}(F) \text{ est fermé.}$$

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est continue. Soit  $F$  un fermé. Alors  $\mathbb{R} \setminus F$  est ouvert, donc  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus F)$  est ouvert. Or, on a :

$$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus F) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \setminus F\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \notin F\} = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(F).$$

Donc  $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(F)$  est ouvert, donc  $f^{-1}(F)$  est fermé. La réciproque se démontre de la même manière. ■

*Remarque.* Attention, l'implication concerne les préimages de sous-ensembles, pas les images de sous-ensembles ! Si  $A \subset \mathbb{R}$  est ouvert (resp., fermé) et que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $f(A)$  peut n'être ni ouvert, ni fermé.

Enfin, nous pouvons utiliser la caractérisation séquentielle des limites pour démontrer :

**Proposition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ . Alors  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si, pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))_{n \geq 0}$  converge (vers  $f(a)$ ).

En se servant des résultats vus dans la section [Opérations sur les limites](#), on en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Proposition.** Soit  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions. Si  $f$  et  $g$  sont continues, alors la somme  $f + g$  et le produit  $f \cdot g$  sont des continues. De plus, le quotient  $f/g$  est continu là où il est défini (c'est-à-dire là où  $g(x) \neq 0$ ).

**Proposition.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et telles que  $f(A) \subset B$ . Alors la fonction composée  $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

## IV-A-2. Exemples

*Exemple.* Les fonctions constantes sont celle de la forme suivante, où  $c \in \mathbb{R}$  est fixé :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto c.$$

Ces fonctions sont clairement continues : quel que soit  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c = f(a)$ . Alternativement, nous pouvons utiliser la caractérisation en termes d'ouverts. Si  $U \subset \mathbb{R}$  est un ouvert, il y a deux cas de figures :

- Si  $c \in U$ , alors  $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$  est bien ouvert.
- Si  $c \notin U$ , alors  $f^{-1}(U) = \emptyset$  est également ouvert.

*Exemple.* La fonction identité est continue :

$$\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x.$$

En effet, quel que soit  $U$  ouvert,  $\text{id}^{-1}(U) = U$  est évidemment ouvert. On en déduit que tous les polynômes sont continus en utilisant le fait que la somme et le produit de fonctions continues sont continus.

*Exemple.* La fonction valeur absolue est continue :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|.$$

En effet, soit  $a \in \mathbb{R}$ . Grâce à l'inégalité triangulaire, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$||x| - |a|| \leq |x - a|.$$

En particulier, si  $\epsilon > 0$  est un réel fixé, on peut choisir  $\delta := \epsilon$  et on aura bien, pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|x - a| < \delta \Rightarrow ||x| - |a|| < \epsilon.$$

Nous pouvons également appliquer la caractérisation en termes de préimages d'intervalles ouverts. Soit  $J = ]a, b[$  un intervalle ouvert, où  $a < b$ . Nous allons montrer que  $f^{-1}(J)$  est un ouvert (et donc en particulier un intervalle ouvert). Il y a plusieurs cas de figures :

- Si  $0 \leq a < b$ , alors  $f^{-1}(J) = ]-b, -a[ \cup ]a, b[$  est bien un ouvert.
- Si  $a < 0 < b$ , alors  $f^{-1}(J) = ]-b, b[$  est un ouvert.
- Si  $a < b \leq 0$ , alors  $f^{-1}(J) = \emptyset$  est un ouvert.

On remarquera en particulier sur cet exemple que l'image directe d'un sous-ensemble ouvert n'est pas forcément ouverte. Par exemple,  $U = ]-1, 1[$  est un intervalle ouvert, mais son image directe par la fonction valeur absolue est :

$$\text{abs}(U) = [0, 1[.$$

Cette image n'est ni ouverte, ni fermée.

*Exemple.* La fonction logarithme népérien est continue :

$$\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x.$$

Le plus simple est d'utiliser la caractérisation en termes d'intervalles. Si  $J = ]a, b[$  où  $a < b$ , alors  $\ln^{-1}(J) = ]e^a, e^b[$  est bien intervalle ouvert. De la même manière, la fonction exponentielle est continue. On remarque en particulier que  $\exp(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[$  et que donc l'image d'un sous-ensemble fermée n'est pas forcément fermée.

*Exemple.* La fonction partie entière n'est pas continue :

$$E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto [x].$$

Soit  $a \in \mathbb{R}$  un réel. Il y a deux cas de figure :

- Si  $a \notin \mathbb{Z}$ , alors  $E$  est continue en  $a$ , car  $\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$ .
- Si  $a \in \mathbb{Z}$ , alors  $E$  n'est pas continue en  $a$ , car  $\lim_{x \rightarrow a} [x]$  n'existe pas (la limite à gauche est  $[a] - 1$  alors que la limite à droite est  $[a]$ ).

En termes de préimages, on a des contre-exemples comme :

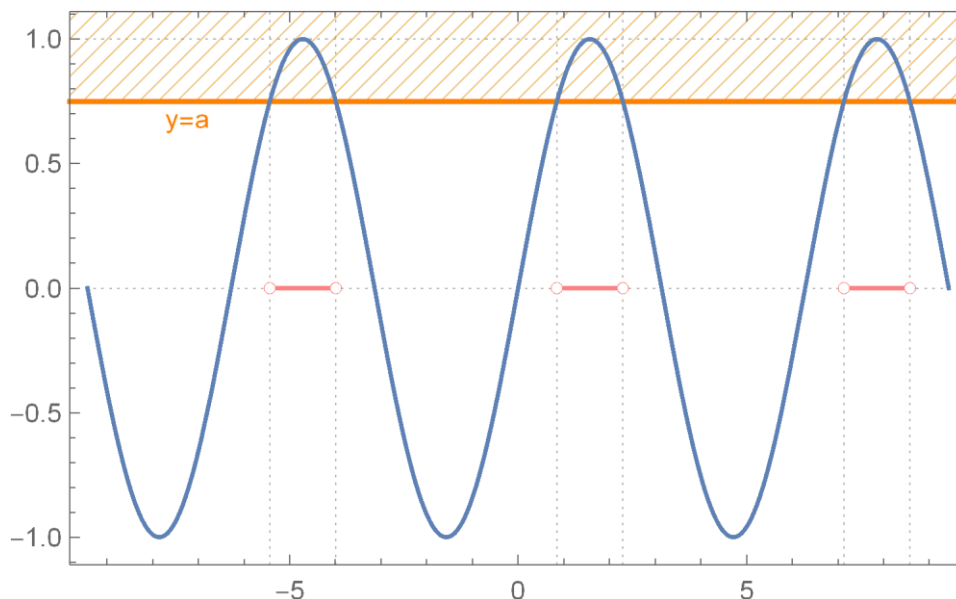
$$E^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1[.$$

*Exemple.* Considérons la fonction sinus. La préimage d'un intervalle ouvert  $I = ]a, +\infty[$  est :

- Si  $a \geq 1$ , alors  $\sin^{-1}(I) = \emptyset$  car aucun angle  $\theta$  ne vérifie  $\sin \theta > 1$ , et  $\emptyset$  est bien ouvert ;
- Si  $-1 \leq a < 1$ , alors si on pose  $\theta = \arcsin a$ , on a (cf. illustration) :

$$\sin^{-1}(I) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]\theta + 2k\pi, -\theta + (2k + 1)\pi[.$$

En particulier, on remarquera que la préimage d'un intervalle ouvert n'est pas forcément un intervalle (mais si la fonction est continue, elle sera bien ouverte).



- Si  $a < -1$ , alors  $\sin^{-1}(I) = \mathbb{R}$  car tous les angles  $\theta$  vérifient  $\sin \theta > a$ .

### IV-A-3. Continuité à droite et à gauche

Définissons maintenant la continuité à gauche et à droite. On notera que dans ces définitions, et contrairement à la définition de continuité donnée plus haut, le point  $a$  que l'on considère n'est pas forcément dans l'intervalle  $I$ .

**Définition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \mathbb{R}$  un réel.

- Supposons que  $I$  contient un voisinage à droite de  $a$  (c'est-à-dire un sous-ensemble de la forme  $[a, a + \epsilon[$  pour  $\epsilon > 0$ ). Alors on dit que  $f$  est *continue à droite* en  $a$  si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \text{ existe et vaut } f(a).$$

- Supposons que  $I$  contient un voisinage à gauche de  $a$  (c'est-à-dire  $]a - \epsilon, a]$  pour  $\epsilon > 0$ ). On dit que  $f$  est *continue à gauche* en  $a$  si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \text{ existe et vaut } f(a).$$

On dit que  $f$  est *continue à gauche* (resp., *à droite*) si elle est continue à gauche (resp., à droite) en chacun des points où elle est définie.

**Proposition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I^\circ$  un point intérieur de  $I$ . Alors  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si,  $f$  est continue à gauche et à droite en  $a$ .

Toute fonction continue est donc continue à gauche et à droite. Donnons un exemple de fonction qui n'est continue que d'un côté.

*Exemple.* La fonction partie entière  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue à droite mais pas à gauche.

## Section IV-B. Prolongement par continuité

**Définition.** Soit  $I$  un intervalle non vide et non réduit à un point, et soit  $a \in I$  un point de cet intervalle. Soit  $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur l'intervalle sauf en  $a$ . On suppose que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Alors on dit que  $f$  est *prolongeable par continuité* en  $a$  et on peut définir une nouvelle fonction, nommée le *prolongement par continuité de  $f$  en  $a$*  :

$$\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a; \\ l, & \text{si } x = a. \end{cases}$$

*Remarque.* Si  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$ , alors son prolongement par continuité  $\tilde{f}$  est continu en  $a$ .

*Exemple.* On définit la fonction :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors en utilisant le fait que  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ , on obtient l'encadrement :

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|.$$

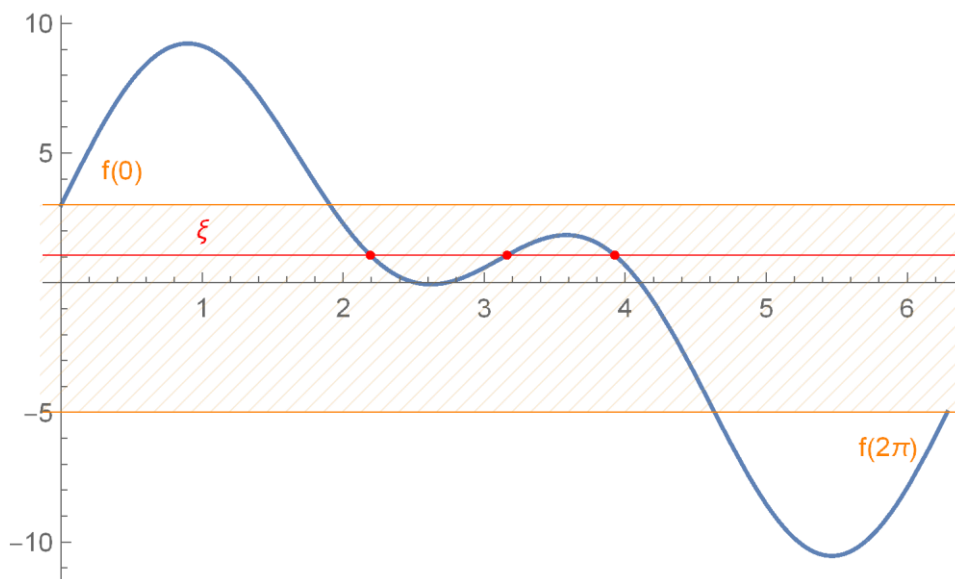
En utilisant le théorème des gendarmes, on en déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$ . On peut donc prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant :

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

## Section IV-C. Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème qui va suivre est un théorème fondamental sur les fonctions continues. Il traduit l'idée, intuitive, que le graphe d'une fonction continue sur un intervalle est « en un seul morceau », qu'il ne contient pas de « trous ». Bien que cela paraisse naturel, il faut le prouver !

On peut rendre cette idée rigoureuse en introduisant la notion de connexité : l'image d'un sous-ensemble connexe par une fonction continue est connexe.



Sur le graphique, on a représenté le graphe d'une fonction  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , deux droites horizontales d'ordonnées  $f(0)$  et  $f(2\pi)$ , et une droite horizontale d'ordonnée  $\xi$ . Quelle que soit l'ordonnée  $\xi$ , tant qu'elle est comprise entre  $f(0)$  et  $f(2\pi)$ , elle coupera le graphe de  $f$  au moins une fois. On notera bien qu'elle peut couper le graphe plusieurs fois, et qu'il y a des droites horizontales dont l'ordonnée n'est pas comprise entre  $f(0)$  et  $f(2\pi)$  mais qui coupe quand même le graph.

**Théorème (des valeurs intermédiaires).** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé, où  $a < b \in \mathbb{R}$ , et soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Soit  $\xi \in \mathbb{R}$  une valeur comprise<sup>21</sup> entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Alors il existe au moins un réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \xi$ .

*Démonstration.* Les cas  $\xi = f(a)$  et  $\xi = f(b)$  sont évidents : on peut prendre  $c = a$  ou  $c = b$ . Supposons donc maintenant que  $\xi \neq f(a)$  et  $\xi \neq f(b)$ . En particulier, on a  $f(a) \neq f(b)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $f(a) < f(b)$  (si ce n'est pas le cas, il suffit d'appliquer le théorème à la fonction  $x \mapsto -f(x)$ , qui est continue).

On définit le sous-ensemble  $A \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$  suivant :

$$A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \xi\}.$$

Cet ensemble est majoré par  $b$ . Il est de plus non vide, car  $a \in A$  (par hypothèse,  $f(a) < \xi$ ). D'après la propriété de la borne supérieure, il admet donc une borne supérieure,  $c := \sup A$ . Notre objectif est maintenant de démontrer que  $f(c) = \xi$ . Nous allons procéder en deux temps : d'abord, nous allons démontrer que  $f(c) \leq \xi$ , puis que  $f(c) \geq \xi$ .

- Comme  $c$  est la borne supérieure de  $A$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $c$ . Comme  $f$  est continue, elle est continue en  $c$ , donc  $f(u_n)$  converge vers  $f(c)$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in A$ , donc  $f(u_n) \leq \xi$ . En passant à la limite et en utilisant le théorème sur les comparaisons de limites, on trouve que  $f(c) \leq \xi$ .
- Démontrons maintenant que  $f(c) \geq \xi$ . On vient de démontrer que  $f(c) \leq \xi$ , or  $f(b) > \xi$  par hypothèse, donc  $c < b$ . Pour  $N$  assez grand, on a donc que  $c + 1/N < b$ ; plus précisément, c'est le cas pour  $N \geq \left\lfloor \frac{1}{b-c} \right\rfloor + 1$ . On définit une suite  $(v_n)$  par :

$$v_n := c + \frac{1}{n + \left\lfloor \frac{1}{b-c} \right\rfloor + 1}.$$

Pour tout  $n$ , on a  $v_n > c$ . Or  $c$  est un majorant de l'ensemble  $A$ , donc  $v_n \notin A$ . On a donc  $f(v_n) > \xi$ . De plus, on a clairement  $\lim v_n = c$ . Par continuité de la fonction  $f$  en  $c$ , on a  $\lim f(v_n) = f(c)$ . En utilisant le théorème sur les limites et les inégalités, on en déduit que  $f(c) = \lim f(v_n) \geq \xi$ .

En conclusion, on a bien trouvé un réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \xi$ . ■

**Corollaire.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, où  $I$  est un intervalle. Alors  $f(I)$  est un intervalle.

La démonstration utilise la caractérisation des intervalles comme les sous-ensembles convexes.

**Lemme.** Un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall x < y < z \in \mathbb{R}, \quad (x \in A \text{ et } z \in A) \Rightarrow y \in A. \quad (*)$$

*Démonstration.* Soit  $A$  un intervalle (ouvert ou fermé) de bornes  $a \leq b \in \overline{A}$ . Soit  $x < y < z$  trois réels. Si  $x \in A$  et  $z \in A$ , alors  $x$  est plus grand que  $a$  et  $z$  est plus petit que  $b$ . Comme  $y$  est compris entre  $x$  et  $z$ , on en déduit que  $y$  appartient bien à l'intervalle.

Réciproquement, supposons que  $A$  vérifie la propriété (\*). Supposons que  $A \neq \emptyset$  (l'ensemble vide vérifie (\*) et est évidemment un intervalle). Il y a plusieurs cas à traiter suivant que  $A$  soit majoré ou non, et minoré ou non. Pour plus de simplicité, nous allons traiter le cas où  $A$  est borné ; les autres cas sont laissés en exercice.

Comme  $A$  est non vide et borné, il admet une borne inférieure  $a = \inf A$  et une borne supérieure  $b = \sup A$ . Si  $a = b$ , alors  $A = \{a\} = [a, a]$  est bien un intervalle. Sinon, nous allons démontrer que si  $a < y < b$ , alors  $y \in A$ .

Posons  $\epsilon_1 = (b - y)/3 > 0$ . Par définition de la borne supérieure,  $b - \epsilon_1$  n'est pas un majorant de  $A$ , donc il existe  $z \in A$  tel que  $z > b - \epsilon_1$ . En particulier,  $y < z$ . De même, si on pose  $\epsilon_2 = (y - a)/3$ , il existe  $x \in A$  tel que  $x < a + \epsilon_2$ , ce qui entraîne  $x < y$ . On peut donc appliquer (\*) au triplet  $x < y < z$  pour en déduire que  $y \in A$ .

<sup>21</sup> Si  $f(a) \leq f(b)$ , on demande que  $f(a) \leq \xi \leq f(b)$ . À l'inverse, si  $f(a) \geq f(b)$ , alors on demande que  $f(a) \geq \xi \geq f(b)$ .

On a donc  $]a, b[ \subset A \subset [a, b]$ . Il reste donc quatre cas suivant que  $a, b \in A$ , ce qui correspond aux quatre intervalles possibles,  $]a, b[$ ,  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  et  $[a, b]$ . ■

La démonstration du corollaire en utilisant ce lemme est un petit exercice laissé à la personne qui lit ces notes.

*Remarque.* Les deux conditions du théorème (définition sur un intervalle et continuité) sont essentielles, comme les contre-exemples suivants le montrent :

- Soit  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = 1/x$ . Alors  $f(-1) = -1$  et  $f(1) = 1$ , mais la valeur  $\xi = 0$ , qui est comprise entre  $f(-1)$  et  $f(1)$ , n'est pas atteinte.
- Soit  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction partie entière,  $E(x) = \lfloor x \rfloor$ . On a  $E(0) = 0$  et  $E(1) = 1$ , mais la valeur  $\xi = 1/2$  n'est pas atteinte.

Donnons un exemple d'application de ce théorème.

**Corollaire.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré impair. Alors  $P$  admet au moins une racine.

*Démonstration.* Considérons un polynôme  $P$  de degré impair sous la forme suivante :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2k+1}X^{2k+1}, \quad a_{2k+1} \neq 0.$$

Quitte à remplacer  $P$  par  $-P$  (qui admet une racine si et seulement si  $P$  admet une racine), on peut supposer que  $a_{2k+1} > 0$ . Alors on a (en utilisant les outils vus au premier semestre :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty.$$

En utilisant la définition de limite, il existe donc  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall x > A, & \quad P(x) > 1; \\ \forall x < B, & \quad P(x) < -1. \end{aligned}$$

En particulier,  $P(A+1) > 1 > 0$  et  $P(B-1) < -1 < 0$ . La valeur  $\xi = 0$  est comprise entre  $P(B-1)$  et  $P(A+1)$ , donc comme  $P$  est une fonction continue, il existe une valeur  $c \in [B-1, A+1]$  telle que  $P(c) = \xi = 0$ . Ce nombre  $c$  est donc une racine de  $P$ . ■

La « réciproque » du théorème des valeurs intermédiaires est fausses. Considérons par exemple la fonction suivante :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en  $x = 0$ . En revanche, pour toutes valeurs  $a, b \in \mathbb{R}$ , si  $\xi$  est une valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \xi$ . Si  $a, b \neq 0$ , cela découle de la continuité de  $\sin(1/x)$  en dehors de 0. Si  $a = 0$  et  $b > 0$  (le cas  $b < 0$  est similaire) et  $\xi$  compris entre 0 et  $b$ , on peut simplement choisir, avec  $k$  suffisamment grand pour avoir  $0 < c < b$  :

$$c := \frac{1}{\arcsin \xi + 2k\pi}.$$

## Section IV-D. Fonctions continues strictement monotones

**Lemme.** Soit  $I$  un intervalle et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement monotone. Alors  $f$  est injective.

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est strictement croissante ; le cas où  $f$  est strictement décroissante est similaire. Soit  $x, y \in I$  deux éléments et supposons que  $x \neq y$ . Alors il y a deux cas possibles.

- Si  $x < y$ , comme  $f$  est strictement croissante on a  $f(x) < f(y)$  et donc  $f(x) \neq f(y)$ .
- Si  $x > y$ , alors  $f(x) > f(y)$  donc  $f(x) \neq f(y)$ .

Dans tous les cas  $f(x) \neq f(y)$ . ■

**Corollaire.** Soit  $I$  un intervalle et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement monotone. Alors la fonction induite  $\bar{f}: I \rightarrow f(I)$  définie par  $x \mapsto f(x)$  est une bijection.

Sous les hypothèses précédentes, on obtient donc une bijection réciproque  $g := \bar{f}^{-1}: f(I) \rightarrow I$ .

**Théorème.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement monotone définie sur un intervalle d'intérieur non vide  $I$ . Alors :

1. L'image  $f(I)$  est un intervalle.
2. La bijection réciproque  $g: f(I) \rightarrow I$  est continue et strictement monotone, de même sens de monotonie que  $f$ .

*Démonstration.* Le premier point a été vu dans la section **Théorème des valeurs intermédiaires**.

Le fait que  $g$  est strictement monotone est un fait général sur les fonctions inverses de fonctions strictement monotones. Supposons que  $f$  est strictement croissante et montrons que  $g$  est strictement croissante (le cas où  $f$  est strictement décroissante est presque identique). Soit  $y_1 < y_2 \in f(I)$  deux éléments de l'image de  $f$ . Soit  $x_1 = g(y_1)$  et  $x_2 = g(y_2)$ . Nous voulons montrer que  $x_1 < x_2$ . Supposons (par l'absurde) que  $x_1 > x_2$ . Comme  $f$  est strictement croissante,  $f(x_1) > f(x_2)$ . Or  $f(x_1) = y_1$  et  $f(x_2) = y_2$ , donc  $y_1 > y_2$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Enfin, montrons le point le plus important : que  $g$  est continue. Encore une fois, supposons que  $f$  est strictement croissante ; l'autre cas est presque identique. Soit  $y_0 \in f(I)$  un élément de l'image et montrons que  $g$  est continue en  $y_0$ . Notons  $x_0 := g(y_0)$ . Soit  $\epsilon > 0$  un réel strictement positif. Alors on a :

$$x_0 - \epsilon < x_0 < x_0 + \epsilon \implies f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon).$$

Notons  $\delta := \min(f(x_0 + \epsilon) - y_0, y_0 - f(x_0 - \epsilon))$ . Notre objectif est de montrer que :

$$\forall y \in f(I), \quad |y - y_0| < \delta \implies |g(y) - g(y_0)| < \epsilon.$$

Soit donc  $y \in f(I)$  un élément de l'image qui vérifie  $|y - y_0| < \delta$ . Notons  $x := g(y)$ . Alors :

$$\begin{aligned} y_0 - \delta < y < y_0 + \delta &\implies y_0 - (y_0 - f(x_0 - \epsilon)) < f(x) < y_0 + (f(x_0 + \epsilon) - y_0) \\ &\implies f(x_0 - \epsilon) < f(x) < f(x_0 + \epsilon) \\ &\implies x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \\ &\implies |x - x_0| < \epsilon \\ &\implies |g(y) - g(y_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

C'était bien ce que nous voulions démontrer. ■

Ce théorème permet de démontrer la continuité de nombreuses fonctions.

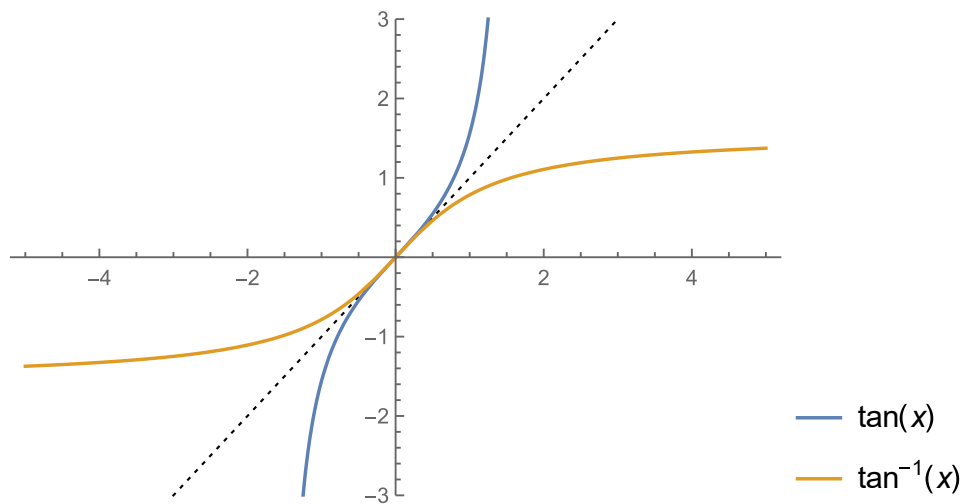
*Exemple.* Considérons la fonction tangente :

$$\tan: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Elle est strictement croissante et continue (car quotient de deux fonctions continues). Donc sa fonction réciproque est continue :

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

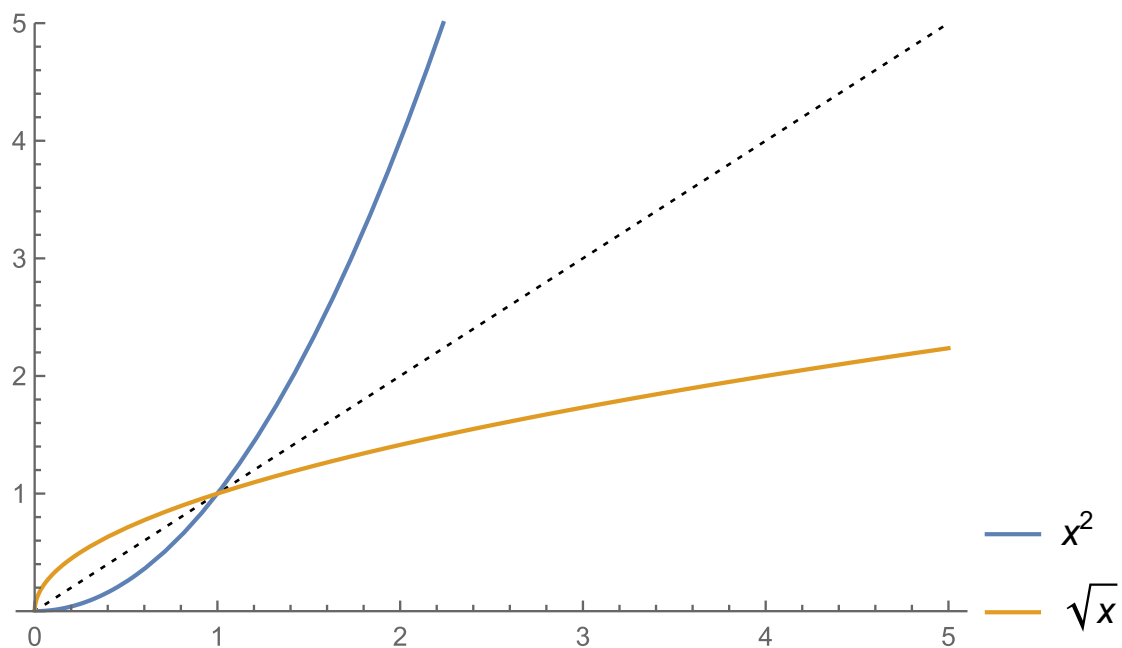




*Exemple.* La fonction « carré » est un polynôme et donc continue :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Sa restriction  $g: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante, d'image  $[0, +\infty[$ . Elle admet donc une réciproque continue  $g^{-1}: [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  qui n'est autre que la fonction racine carrée  $x \mapsto \sqrt{x}$ .





## Chapitre V. Compacité

### Section V-A. Théorème de Bolzano–Weierstrass

#### V-A-1. Sous-suites, suites bornées

**Définition.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle. Une *sous-suite* de  $(u_n)$  (aussi appelée « suite extraite ») est une suite  $(v_n)$  de la forme  $(v_n) = (u_{\phi(n)})$ , où  $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction strictement croissante.

*Exemple.* Soit  $(u_n) = \frac{3+(-1)^n}{2n+1}$ . Elle admet une sous-suite définie en ne gardant que les termes de rang pair (en prenant  $\phi(n) = 2n$ ), c'est-à-dire les termes  $u_0, u_2, u_4, u_6, \dots$  :

$$v_n = u_{2n} = \frac{4}{4n+1}$$

En particulier, on notera que le terme  $u_4$ , qui était en position 4 dans la suite de départ, est maintenant en position 2 ; le terme  $u_6$ , qui était en position 6, est en position 3 dans  $(v_n)$  ; etc.

Elle admet aussi une sous-suite constituée des termes de rang impair (avec  $\phi(n) = 2n+1$ ), c'est-à-dire les termes  $u_1, u_3, u_5, \dots$  :

$$v'_n = u_{2n+1} = \frac{2}{4n+3}$$

Elle admet aussi une sous-suite constituée des termes de rangs qui sont des carrés ( $\phi(n) = n^2$ ), c'est-à-dire les termes  $u_0, u_1, u_4, u_9, \dots$  :

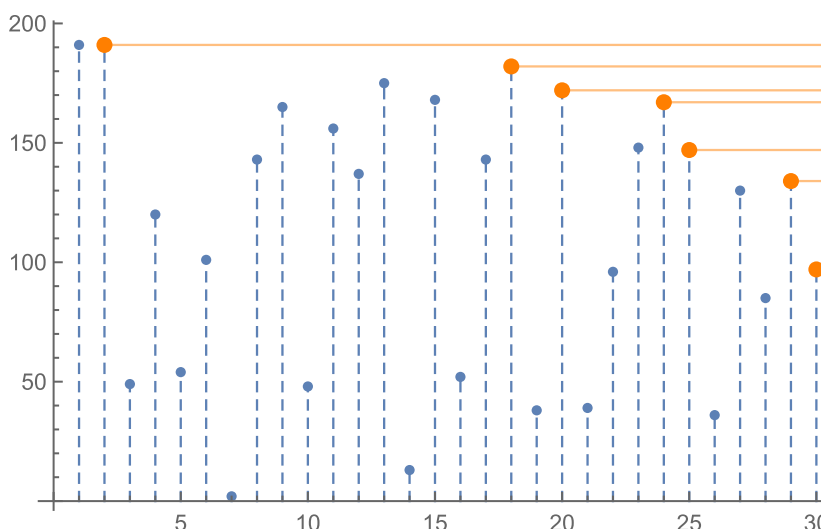
$$v''_n = u_{n^2} = \frac{3 + (-1)^{n^2}}{2n^2 + 1}$$

**Lemme.** Soit  $(u_n)$  une suite réelle. Alors il existe (au moins) une sous-suite  $(v_n) = (u_{\phi(n)})$  qui est monotone.

*Démonstration.* On dit qu'un rang  $n$  de la suite est un « pic » si  $u_n$  est plus grand que tous les termes qui le suivent. En d'autres termes, l'ensemble des pics de la suite est :

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n, u_n > u_m\}.$$

Les pics sont représentés par les points plus gros sur la figure suivante.



Il y a deux cas de figures : soit il y a un nombre fini de pics, soit il y en a un nombre infini. Dans chacun des deux cas, nous allons nous en servir pour extraire une sous-suite monotone de  $(u_n)$ .

1. Supposons pour commencer qu'il y a une infinité de pics. On peut numéroter les pics dans l'ordre croissant :

$$P = \{\phi(0) < \phi(1) < \phi(2) < \dots\}.$$

Considérons la sous-suite  $(v_n) = (u_{\phi(n)})$  constituée des pics successifs. Pour tout  $n < m$  deux entiers, on sait que  $\phi(n)$  est un pic, donc  $u_{\phi(n)}$  est plus grand que tous les termes qui suivent, et donc en particulier plus grand que  $u_{\phi(m)}$ . Donc  $u_{\phi(n)} > u_{\phi(m)} \Rightarrow v_n > v_m$ . La suite  $(v_n)$  est donc strictement décroissante (et donc monotone).

2. Supposons maintenant qu'il n'y a qu'un nombre fini de pics. On va construire de proche en proche (formellement, par récurrence) les  $\phi(n)$  de sorte que  $(u_{\phi(n)})$  soit croissante.

- On commence par choisir un nombre  $\phi(0) \in \mathbb{N}$  qui est plus grand que tous les pics : soit il n'y a pas de pics et on choisit  $\phi(0) = 0$ , soit il y a un plus grand pic  $N$  et on choisit  $\phi(0) = N + 1$ .
- Comme  $\phi(0)$  est plus grand que le dernier pic, ce n'est pas un pic. Donc il existe un rang  $\phi(1) > \phi(0)$  tel que  $u_{\phi(0)} \leq u_{\phi(1)}$ .
- Comme  $\phi(1) > \phi(0)$ , le rang  $\phi(1)$  n'est pas un pic. Donc il existe un rang  $\phi(2) > \phi(1)$  tel que  $u_{\phi(1)} \leq u_{\phi(2)}$ .
- On continue ainsi et on trouve une liste  $\phi(0) < \phi(1) < \phi(2) < \dots$  telle que  $u_{\phi(0)} \leq u_{\phi(1)} \leq u_{\phi(2)} \leq \dots$ .

En conclusion, on a trouvé une suite extraite  $(v_n) = (u_{\phi(n)})$  qui est croissante, donc monotone. ■

**Corollaire.** Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

*Démonstration.* Soit  $(u_n)$  une suite réelle bornée. D'après le lemme précédent, elle admet une sous-suite monotone (croissante ou décroissante). En utilisant le théorème de convergence des suites monotones bornées, on conclut que cette sous-suite est convergente. ■

*Exemple.* La suite  $(u_n) = (\sin n)_{n \geq 0}$  admet une sous-suite convergente.

*Exemple.* Il existe des suites qui n'ont pas de sous-suite convergente. Par exemple,  $(u_n) = (n^2)$  n'admet pas de sous-suite convergente : toutes ses sous-suites tendent vers  $+\infty$ . D'après le corollaire précédent, ces sous-suites ne peuvent être bornées.

## V-A-2. Parties compactes

**Définition.** Soit  $K \subset \mathbb{R}$  une partie. On dit que  $K$  est *compact* si toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $K$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $K$ .

*Exemple.* Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé. D'après le résultat de la section précédente,  $I$  est compact. En effet, soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $I$ . Elle est bornée, car elle est minorée par  $a$  et majorée par  $b$ . Elle admet donc une sous-suite convergente  $(v_n) = (u_{\phi(n)})$  qui tend vers une limite  $l \in \mathbb{R}$ . Comme  $a \leq v_n \leq b$  pour tout  $n$ , on en déduit par le théorème de comparaison des limites que  $a \leq l \leq b$  et donc que  $l \in [a, b]$ .

*Exemple.* Soit  $K = \{a_1, \dots, a_d\}$  un ensemble fini. Alors  $K$  est compact. En effet, si  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $K$ , alors elle prend une des valeurs de  $K$ , disons  $a_k$ , une infinité de fois (car la suite possède une infinité de termes). Soit  $\phi(0) < \phi(1) < \dots$  les rangs tels que  $u_{\phi(n)} = a_k$ . Alors  $(v_n) = (u_{\phi(n)})$  est une sous-suite constante en  $a_k$  et converge donc vers  $a_k$ .

*Exemple.* L'ensemble  $A = [0, +\infty[$  n'est pas compact. Par exemple, la suite  $(u_n) = (n^2)$  n'a pas de sous-suite convergente.

*Exemple.* L'ensemble  $A = ]0,1[$  n'est pas compact. Toutes les sous-suites de la suite  $(u_n) = (1/n + 1)$  convergent vers 0, mais 0 n'est pas un élément de  $A$ .

**Théorème (Bolzano–Weierstrass).** Une partie  $K \subset \mathbb{R}$  est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

*Démonstration.* Commençons par supposer que  $K$  est fermée et bornée. Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $K$ . Comme  $K$  est bornée, la suite  $(u_n)$  l'est aussi. D'après la section **Sous-suites, suites bornées**, elle admet donc une sous-suite  $(u_{\phi(n)})$  qui converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $K$  est fermée, elle est aussi séquentiellement fermée d'après la section **Parties séquentiellement fermées**. Comme  $(u_{\phi(n)})$  est une suite d'éléments de  $K$ , sa limite  $l$  appartient donc à  $K$ . On a donc montré que  $(u_n)$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $K$ .

Réciproquement, supposons que  $K$  est compacte. Montrons qu'elle est alors fermée et bornée.

- Montrons que  $K$  est séquentiellement fermée, ce qui impliquera qu'elle est fermée. Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $K$  qui converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$ . Comme  $K$  est compacte, la suite  $(u_n)$  admet une sous-suite  $(u_{\phi(n)})$  qui converge vers une limite  $l'$  qui appartient à  $K$ . Mais comme  $(u_n)$  converge vers  $l$ , sa sous-suite  $(u_{\phi(n)})$  converge vers  $l$  aussi, donc  $l = l'$  par unicité de la limite. On en déduit que  $l \in K$  et donc que  $K$  est séquentiellement fermée.
- Montrons maintenant que  $K$  est bornée. Supposons (par l'absurde) qu'elle ne l'est pas, par exemple qu'elle n'est pas majorée (le cas où  $K$  n'est pas minorée est similaire). Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $K$  n'est pas majorée, le réel  $n$  n'est pas un majorant de  $K$ , donc il existe un élément  $u_n \in K$  tel que  $u_n > n$ . Alors la suite  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $K$ , mais aucune de ses sous-suites ne converge. En effet, aucune de ses sous-suites n'est majorée, mais une suite convergente est bornée. ■

## Section V-B. Image d'un compact par une fonction continue

**Théorème.** Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $K \subset A$  un compact. Alors  $f(K)$  est un compact.

*Démonstration.* Soit  $(y_n)$  une suite d'éléments de  $f(K)$ . Pour tout  $n$ , il existe  $x_n \in K$  tel que  $f(x_n) = y_n$ . La suite  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $K$ , qui est compact, donc elle admet une sous-suite convergente  $(x_{\phi(n)})$  qui tend vers une limite  $l \in K$ . Comme  $f$  est continue, la suite  $(y_{\phi(n)}) = (f(x_{\phi(n)}))$  tend vers  $f(l) \in K$ . La suite  $(y_n)$  admet donc bien une sous-suite convergente. ■

**Avertissement.** Dans le théorème précédent, il faut bien que  $K$  soit compact, donc fermé et borné ! Si l'une des deux conditions n'est pas vérifiée, alors le résultat est faux. En effet, la fonction tangente est continue, et l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est borné, mais son image est  $\mathbb{R}$  qui n'est pas borné. La fonction exponentielle est continue, et  $\mathbb{R}$  est fermé, mais son image  $]0, +\infty[$  n'est pas fermée.

**Corollaire.** Soit  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, où  $K$  est compact. Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

*Démonstration.* D'après le théorème précédent,  $f(K)$  est compact. En particulier il est borné, donc  $f$  l'est. De plus,  $f(K)$  admet une borne supérieure  $M = \sup f(K)$  et une borne inférieure  $m = \inf f(K)$ . On a vu que les bornes d'un ensemble appartiennent à son adhérence :  $m, M \in \overline{f(K)}$ . Mais comme  $K$  est compact, il est fermé, donc  $m, M \in f(K)$ . Donc  $f$  atteint ses bornes. ■

## Section V-C. Continuité uniforme

On rappelle la définition de la continuité avec des  $\epsilon$ - $\delta$ . Une fonction  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle d'intérieur non vide est continue si, pour tout  $x \in I$ , sa limite en  $x$  vaut  $f(x)$ , ce qui se traduit par :

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \exists \delta > 0, \forall y \in I, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Dans l'énoncé précédent, le quantificateur «  $\forall x \in I$  » arrive avant le quantificateur «  $\exists \delta > 0$  ». Le nombre  $\delta$  peut donc dépendre du nombre  $x$ . Nous allons introduire une nouvelle définition, plus restrictive, dans laquelle le nombre  $\delta$  ne dépend pas du nombre  $x$ .

**Définition.** Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle d'intérieur non vide. On dit que  $f$  est *uniformément continue* si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

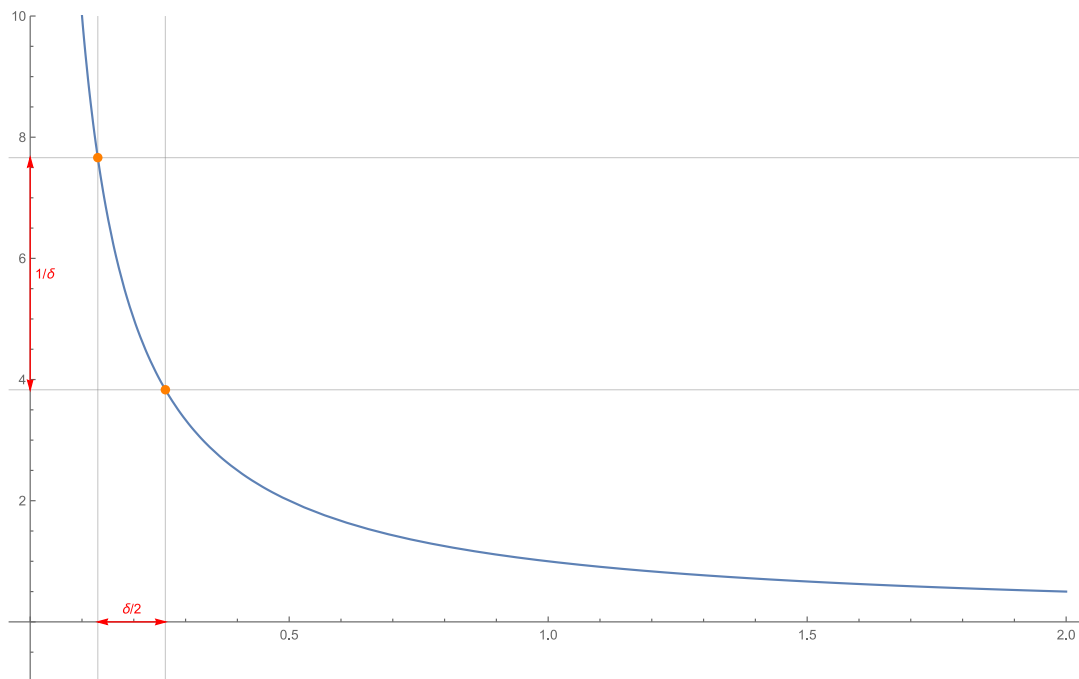
**Proposition.** Une fonction uniformément continue est continue.

*Démonstration.* Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue. Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $f$  est uniformément continue, il existe un nombre  $\delta > 0$  tel que, quels que soit  $x, y \in I$ , si  $|x - y| < \delta$ , alors  $|f(x) - f(y)| < \delta$ . Mais alors, pour un  $x$  fixé, la fonction  $f$  est bien continue en  $x$  : le  $\delta$  à choisir dans la définition de continuité ne dépend pas de  $x$ . ■

La réciproque est fautive ! Considérons la fonction suivante :

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Elle est bien sûr continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Cependant, elle n'est pas uniformément continue. Le raisonnement est illustré sur la figure suivante :



Pour le montrer, on choisit  $\epsilon = 1$ . Soit  $\delta > 0$  un réel quelconque. On veut trouver deux réels  $x, y > 0$  tels que  $|x - y| < \delta$  mais avec  $|f(x) - f(y)| \geq 1$ . Or on a :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy}.$$

Il suffit donc de choisir  $x$  et  $y$  proches l'un de l'autre mais très petits. Par exemple, on peut prendre :

$$x = \min(\delta, 1), \quad y = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- Si  $\delta \geq 1$ , alors  $x = 1$  et  $y = \frac{1}{2}$ . On a alors  $|x - y| = \frac{1}{2} < \delta$ , et :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = |1 - 2| = 1 \geq \epsilon.$$

- Si  $\delta < 1$ , alors  $x = \delta$  et  $y = \frac{\delta}{2}$ , donc  $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ . Mais on a :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x - y|}{xy} = \frac{\delta/2}{\delta^2/2} = \frac{1}{\delta} > \epsilon = 1.$$

Donc dans tous les cas, la condition n'est pas vérifiée.

*Remarque.* Contrairement à la notion de « continuité » simple, il n'y a pas de notion de « continuité uniforme » en un point. La continuité uniforme est une propriété globale de la fonction.

**Théorème (Heine).** Soit  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si  $K$  est compact, alors  $f$  est uniformément continue.

*Démonstration.* Supposons au contraire que  $f$  n'est pas uniformément continue. Il existe donc un réel  $\epsilon > 0$  vérifiant :

$$\forall \delta > 0, \exists x, y \in K, \quad |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Soit  $n \geq 1$  un entier. En prenant  $\delta = \frac{1}{n}$  dans l'énoncé précédent, on trouve deux éléments  $x_n, y_n \in K$  tels que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Comme  $K$  est compact, la suite  $(x_n)$  admet une sous-suite convergente  $(x_{\phi(n)})$  avec  $\lim x_{\phi(n)} = l \in K$ . On a l'encadrement :

$$x_{\phi(n)} - \frac{1}{\phi(n)} < y_{\phi(n)} < x_{\phi(n)} + \frac{1}{\phi(n)}.$$

Comme  $(\phi(n))$  est une suite infinie d'entiers strictement croissante, on a  $\lim \phi(n) = +\infty$ , donc  $\lim 1/\phi(n) = 0$ . Par le théorème des gendarmes, on en déduit que  $\lim y_{\phi(n)} = l$ . Or, par hypothèse, on a :

$$|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}| \geq \epsilon.$$

En utilisant les opérations sur les limites et la continuité de la fonction valeur absolue, on en déduit que :

$$|l - l| \geq \epsilon \Rightarrow 0 \geq \epsilon.$$

Cela est absurde car on a supposé que  $\epsilon > 0$ . ■

## Section V-D. Compacts et recouvrements

La définition des compacts («  $K$  est compact si toute suite de  $K$  admet une sous-suite convergente vers une limite dans  $K$  ») est bien adaptée car la topologie de  $\mathbb{R}$  est assez simple et peut se « tester » avec des suites, comme on l'a vu dans la section **Parties séquentiellement fermées**. Mais il existe des espaces topologiques plus compliqués dans lesquels ce n'est pas le cas. La caractérisation suivante s'applique alors.

**Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Un *recouvrement (ouvert)* de  $A$  est une collection  $\{U_i\}_{i \in I}$  où  $I$  est un ensemble d'indices et les  $U_i$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$  tels que :

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

En d'autres termes, chaque élément de  $A$  est dans au moins un des  $U_i$ . Un *sous-recouvrement* de  $\{U_i\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $A$  de la forme  $\{U_i\}_{i \in J}$  où  $J \subset I$ . Un recouvrement est *fini* si l'ensemble des indices est fini.

*Exemple.* Soit  $A = [0, +\infty[$ . Alors la collection  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  donnée par  $U_i = ]-1, i[$  est un recouvrement ouvert de  $A$ . Il n'admet pas de sous-recouvrement fini. En effet, supposons que  $\{U_i\}_{i \in J}$  est un recouvrement de  $A$ , où  $J \subset \mathbb{N}$  est fini. Alors  $J$  a un plus grand élément, disons  $n_0 = \max J$ . On voit alors que  $\bigcup_{i \in J} U_i \subset ]-1, n_0[$  et donc que  $A$  n'est pas inclus dans la réunion.

**Théorème (Borel-Lebesgue).** Soit  $K \subset \mathbb{R}$  une partie de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble  $K$  est compact si et seulement si tout recouvrement ouvert de  $K$  admet un sous-recouvrement fini.

Jusqu'à la fin de la section, nous dirons qu'un ensemble  $K$  est « t-compact » si tout recouvrement de  $K$  admet un sous-recouvrement fini. Notre objectif est donc de démontrer que  $K$  est compact si et seulement s'il est t-compact.

**Lemme.** Si  $K \subset \mathbb{R}$  est t-compact, alors il est borné.

*Démonstration.* Supposons que  $K \subset \mathbb{R}$  est t-compact. On définit un recouvrement ouvert  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $K$  par :

$$U_n = ]-n, n[.$$

Comme  $K$  est t-compact, ce recouvrement admet un sous-recouvrement ouvert  $\{U_n\}_{n \in J}$  avec  $J \subset \mathbb{N}$  un sous-ensemble fini. Soit  $n_0 = \max J$  (qui existe car  $J$  est fini). Alors  $K \subset ]-n_0, n_0[$  et donc  $K$  est borné. ■

**Lemme.** Si  $K \subset \mathbb{R}$  est t-compact, alors il est fermé.

*Démonstration.* Soit  $K \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble t-compact. Nous voulons montrer que  $\mathbb{R} \setminus K$  est ouvert. Soit  $y_0 \in \mathbb{R} \setminus K$  un point qui n'appartient pas à  $K$ . Nous allons montrer que  $\mathbb{R} \setminus K$  est un voisinage de  $y_0$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{R} \setminus K$  contient une boule ouverte centrée en  $y_0$ .

Soit  $x \in K$  quelconque. En particulier,  $x \neq y_0$ . On note  $r_x = |y_0 - x|/3 > 0$ . Les deux boules ouvertes  $B(x, r_x)$  et  $B(y_0, r_x)$  sont disjointes. En effet, si  $z$  appartenait aux deux, alors on aurait à la fois  $|x - z| < r_x$  et  $|y_0 - z| < r_x$ , donc en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|y_0 - x| = |y_0 - z + z - x| \leq |y_0 - z| + |z - x| < 2r_x = \frac{2}{3}|y_0 - x|.$$

C'est absurde, car  $y_0 \neq x$  donc  $|y_0 - x| > 0$ .

La collection  $\{U_x\}_{x \in K}$  avec  $U_x = B(x, r_x)$  est un recouvrement ouvert de  $K$ , car quel que soit  $x \in K$ , on a :

$$x \in B(x, r_x) = U_x \subset \bigcup_{x \in K} U_x.$$

Comme  $K$  est t-compact, ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, il existe un sous-ensemble fini  $J$  tel que  $K \subset \bigcup_{x \in J} B(x, r_x)$ .

Posons  $r := \min_{x \in J} r_x > 0$ , qui existe car  $J$  est fini. Soit  $x \in J$ . On a vu que  $B(y_0, r_x) \cap B(x, r_x) = \emptyset$ . Or,  $B(y_0, r) \subset B(y_0, r_x)$ , donc  $B(y_0, r) \cap B(x, r_x) = \emptyset$  quel que soit  $x \in J$ , donc :



$$B(y_0, r) \cap \left( \bigcup_{x \in J} B(x, r_x) \right) = \emptyset \Rightarrow B(y_0, r) \cap K = \emptyset.$$

Donc finalement,  $B(y_0, r) \subset \mathbb{R} \setminus K$  et donc  $\mathbb{R} \setminus K$  est un voisinage de  $y_0$ . ■

En utilisant le fait qu'un ensemble fermé et borné est compact, on obtient :

**Corollaire.** Si  $K$  est t-compact, alors il est compact.

Passons maintenant à la réciproque. On commence par démontrer un résultat intermédiaire :

**Lemme.** Soit  $a \leq b$  deux réels. Le segment  $[a, b]$  est t-compact.

*Démonstration.* Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement ouvert du segment  $[a, b]$ . Quel que soit  $x \in [a, b]$ ,  $\{U_i\}_{i \in I}$  est encore un recouvrement de  $[a, x]$ . On pose :

$$X = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ admet un sous-recouvrement fini par les éléments de } \{U_i\}_{i \in I}\}.$$

Notre objectif est de montrer que  $b \in X$ . On a clairement  $a \in X$  : en effet, comme  $\{U_i\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $[a, b]$ , l'élément  $a$  appartient à au moins un des  $U_i$ , disons  $U_{i_a}$ , et  $\{U_i\}_{i \in \{i_a\}}$  est un sous-recouvrement fini de  $[a, a]$ . De plus,  $X$  est majoré par  $b$ . On en déduit donc, d'après la propriété de la borne supérieure, qu'il en admet une,  $m = \sup X \leq b$ .

Le nombre  $m$  appartient à l'un des ouverts du recouvrement, disons  $U_{i_m}$ . Comme  $U_{i_m}$  est ouvert, il contient une boule ouverte  $]m - \epsilon, m + \epsilon[$  avec  $\epsilon > 0$ . Comme  $m$  est la borne supérieure de  $X$ , le nombre  $m - \epsilon$  n'est pas un majorant de  $X$ , donc il existe un réel  $x \in X$  avec  $m - \epsilon < x$ . Comme  $x \in X$ , on a un sous-recouvrement fini  $\{U_{j_0}, \dots, U_{j_n}\}$  de  $[a, x]$ . En rajoutant  $U_{i_m}$ , on obtient un sous-recouvrement fini  $\{U_{j_0}, \dots, U_{j_n}, U_{i_m}\}$  de  $[a, m + \epsilon/2]$ . On en déduit deux choses :

- L'élément  $m$  appartient à  $X$ , car  $\{U_{j_0}, \dots, U_{j_n}, U_{i_m}\}$  est aussi un recouvrement ouvert de  $[a, m]$ .
- Si on avait  $m < b$ , alors on aurait une contradiction :  $m$  est censé être la borne supérieure de  $X$ , mais il existe un réel  $z \in ]m, m + \epsilon/2[$  contient un nombre strictement plus petit que  $b$ , et ce réel  $z$  appartient à  $X$  tout en étant strictement plus grand que  $m$ .

Donc en conclusion,  $m = b \in X$  donc  $[a, b]$  admet un sous-recouvrement fini. ■

**Lemme.** Soit  $F \subset K \subset \mathbb{R}$  deux sous-ensembles où  $F$  est fermé et  $K$  est t-compact. Alors  $F$  est t-compact.

*Démonstration.* Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $F$ . Alors  $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{\mathbb{R} \setminus F\}$  est un recouvrement ouvert de  $K$ . Il y a donc un sous-recouvrement fini  $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, \mathbb{R} \setminus F\}$  de  $K$ . On voit facilement que  $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$  est un sous-recouvrement fini de  $F$ . ■

**Corollaire.** Si  $K \subset \mathbb{R}$  est compact, alors il est t-compact.

*Démonstration.* Comme  $K$  est compact, il est fermé et borné. Il existe donc deux réels  $m \leq M$  tels que  $K \subset [m, M]$ . On a vu que  $[m, M]$  est t-compact. Comme  $K$  est fermé, il est aussi t-compact d'après le lemme précédent. ■



# Index

---



---

## A

associativité · 7

---

## B

bord · 24  
borne inférieure · 11  
borne supérieure · 11  
boule ouverte · 15

---

## C

commutativité · 7  
compact · 60  
complémentaire · 20  
continuité  
  à droite · 52  
  à droite en un point · 52  
  à gauche · 52  
  à gauche en un point · 52  
  d'une fonction · 49  
continuité uniforme · 62  
continuité  
  d'une fonction en un point · 49  
convergence d'une suite · 18

---

## D

dense · 14  
distributivité · 8  
droite réelle étendue · 34

---

## E

élément neutre · 8

---

## F

fermé · 20  
fonctions monotones · 46

---

## I

intérieur · 19  
inverse · 10

---

## L

limite  
  limite à droite · 35  
  limite à gauche · 36  
  limite d'une fonction en un point en restant  
    différent de ce point · 35  
  limite finie d'une fonction en l'infini · 33  
  limite finie d'une fonction en un point · 27  
  limite infinie d'une fonction en un point · 34

---

## M

majorant · 10  
majoration · 10  
maximum · 10  
minimum · 11  
minorant · 10  
minoration · 10

---

## O

opposé · 8  
ouvert · 16

---

## P

partie entière · 13  
point adhérent · 22  
point intérieur · 19  
préimage · 31  
prolongement par continuité · 52  
Propriété archimédienne · 12  
Propriété de la borne supérieure · 11

---

## R

relation d'ordre · 8

---

## S

sous-suite · 59

---

## T

théorème de Bolzano–Weierstrass · 61  
théorème de comparaison des limites · 45

théorème de Heine · 63  
théorème des gendarmes · 44

*voisinage de  $+\infty$*  · 24  
*voisinage de  $-\infty$*  · 24  
voisinage relatif · 25  
voisinage épointé · 25

---

**V**

voisinage · 15